



## TÍTULO

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO MOVILIZADO  
POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO DURANTE EL ANÁLISIS  
DE SITUACIONES REALES DE ENSEÑANZA SOBRE EL  
CONCEPTO DE POLÍGONO

ESTUDIO DE CASO EN LA UNIVERSIDAD DE HUELVA

=

SPECIALIZED MATHEMATICAL KNOWLEDGE MOBILIZED BY  
PROSPECTIVE TEACHERS DURING THE ANALYSIS OF REAL  
TEACHING SITUATIONS ABOUT THE CONCEPT OF POLYGON

CASE STUDY AT THE UNIVERSITY OF HUELVA

## AUTORA

Ana Moreno Martínez

Esta edición electrónica ha sido realizada en 2021

Tutora	Dra. Dña. Nuria Climent Rodríguez
Instituciones	Universidad Internacional de Andalucía ; Universidad de Huelva
Curso	<i>Máster Oficial en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (2019/20)</i>
©	Ana Moreno Martínez
©	De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía
Fecha documento	2020



**Atribución-NoComercial-SinDerivadas  
4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**

Para más información:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en>

## **Trabajo Fin de Máster**

“Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas”

### **Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones reales de enseñanza sobre el concepto de polígono**

*Estudio de caso en la Universidad de Huelva*

Specialized mathematical knowledge mobilized by prospective teachers during the analysis of real teaching situations about the concept of polygon

*Case study at the University of Huelva*

Ana Moreno Martínez

Dirigido por la Dra. Nuria Climent Rodríguez

Septiembre, 2020



**Universidad  
de Huelva**



**Resumen:**

En esta investigación se lleva a cabo un estudio de caso con estudiantes para maestros (EPM), con el objetivo de describir qué conocimiento matemático especializado movilizan durante el análisis de una situación real de enseñanza y aprendizaje videograbada sobre la definición de polígono. El análisis se hará teniendo en cuenta el modelo analítico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Los resultados nos permiten determinar que los EPM movilizan un conocimiento limitado en cuanto a definir como práctica matemática. Por el contrario, ponen en juego una amplia variedad de conocimiento didáctico del contenido, sobretodo, en lo relativo a dificultades que pueden presentar los alumnos y en ejemplos como medio para la enseñanza.

**Palabras clave:** conocimiento especializado, polígono, estudiante para maestro, análisis de vídeo.

**Abstract:**

In this research, a case study is carried out with prospective teachers (EPM) with the objective of describing what specialized mathematical knowledge they mobilize during the analysis of a real video-recorded teaching and learning situations about the definition of polygon. . The analysis will be done taking into account the analytical model of specialized knowledge of the mathematics teacher (MTSK). The results allow us to determine that the EPMs mobilize a limited knowledge in how to define as mathematical practice. On the contrary, they put into play a wide variety of didactic knowledge of the content, above all, in difficulties that students may have and examples as a means of teaching.

**Keywords:** specialized knowledge, polygon, prospective teacher, video analysis.

## INTRODUCCIÓN

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas es una cuestión que en nuestros días toma un papel protagonista dentro de la investigación en la didáctica de las matemáticas. Así, se ha estudiado como el análisis de situaciones reales de enseñanza en sus clases de formación inicial permite adquirir a estudiantes para maestro (en adelante EPM) elementos de conocimiento especializado, abriendo la puerta a un aprendizaje potencial (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013) en relación con la matemática en general, y con algunos contenidos matemáticos concretos como el concepto de polígono o la clasificación de triángulos.

Tomando esto como referencia, mi TFM tratará de contribuir, modestamente, a otras investigaciones y desarrollo profesional de otros docentes aportando información sobre qué conocimiento matemático especializado activan los EPM en relación con el concepto de polígono durante el análisis de vídeo de clases reales. Para poder profundizar en este conocimiento utilizaremos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematical Teacher's' Specialised Knowledge – MTSK*) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

Estudios como el de Contreras y Blanco (2002) dejan en evidencia el conocimiento que poseen los futuros maestros, sobre la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, teniendo en cuenta que los EPM son la oportunidad más inmediata para cambiar esta realidad, surge mi interés por conocer en qué medida puede hacer movilizar conocimiento especializado una herramienta como es el análisis de clases reales. Esta herramienta, por un lado, puede solventar la desvinculación entre la teoría y la práctica existente en su formación inicial. Y, por otro lado, acerca a los EPM a la realidad del aula ofreciendo condiciones para la construcción de conocimiento útil. Por todo esto, es necesario conocer qué conocimientos movilizan los EPM mediante el análisis de una práctica real para saber si podemos considerar dicho análisis como vía de formación inicial en futuros maestros.

La pregunta de investigación que orienta este trabajo es ¿qué conocimiento matemático especializado sobre el concepto de polígono movilizan los EPM, desde la perspectiva del MTSK, cuando se analiza una situación real de enseñanza?

## MARCO TEÓRICO

### *Definir como actividad matemática*

Definir es una de las prácticas matemáticas que los docentes deben desempeñar en el aula. Y para realizarla correctamente deben saber qué significa definir, con qué finalidad se define en el ámbito escolar y qué característica debe poseer una buena definición (Pascual, Codes, Martín y Carrillo, 2019).

Según De Villiers (1988), citado en Pascual et al. (2019), existen dos formas de definir un concepto matemático:

- Definición descriptiva (a posteriori): el término a definir se va obteniendo a partir de ciertas propiedades, presentadas de manera literal, de las cuales pueden deducirse las restantes.
- Definición constructiva (a priori): la definición se obtiene a través de la experimentación.

Las principales características que debe poseer una definición, las recoge Van Dormolen y Zaslavsky (2003) en criterios que desde el punto de vista de un sistema lógico exigen una adecuada definición:

- Criterio de jerarquía: debe basarse en otros conceptos previamente definidos.
- Criterio de existencia: debe haber al menos un ejemplo de que el concepto que se define existe en el contexto considerado.
- Criterio de equivalencia: debe ser consistente con otras definiciones del concepto que se den por válidas.
- Criterio de axiomatización: cualquier elemento que se utilice en una definición deben ser definidos previamente de manera no circular, excepto los términos indefinidos asumidos como punto de partida en el sistema axiomático en el que se está trabajando.
- Criterio de minimalidad: la definición debe contener única y exclusivamente la información que es estrictamente necesaria.
- Criterio de elegancia: cuando hay que elegir entre dos definiciones equivalentes pueden considerarse criterios como su extensión o su simplicidad.

Son muchas las investigaciones (e.g. Carreño y Climent, 2009; Contreras y Blanco, 2002) que evidencian las limitaciones al definir, ya que son muchas las dificultades que se aprecian entre los EPM a la hora de identificar las propiedades necesarias y suficientes de una definición según los criterios ofrecidos con anterioridad.

### ***Análisis de vídeos de clases reales en la formación inicial de maestros***

Las herramientas obtenidas directamente de la realidad de las aulas brindan a los EPM la oportunidad de aprender desde la práctica sin estar físicamente presentes en el aula (Borko, Koellner, Jacobs y Seago, 2010). Una de estas herramientas son los vídeos de clases reales, cuyo uso ha crecido significativamente en la última década (Santagata y Angelici, 2010), y con ello el desarrollo de numerosas investigaciones sobre esta herramienta que permiten la reflexión de manera colaborativa en el aula de formación inicial (Climent et al., 2013).

Las experiencias de investigaciones sobre el uso del análisis de clases reales (e.g. Carrillo y Climent, 2008; Climent et al., 2013) se toman como antecedentes de la problemática que plantea este trabajo. Dichas investigaciones resaltan los beneficios de esta herramienta en la formación de EPM ya que les permite tanto desarrollar nuevos conocimientos y competencias como el fomento de una mirada profesional (Climent et al., 2016; Fortuny y Rodríguez, 2012). Podemos resumir los beneficios del uso de vídeos de clases reales en tres funciones claves tal como establecen Climent, Montes, Carrillo, Liñán, Muñoz-Catalán, Barrera y León (2016).

- ✓ Permite a los EPM analizar con máximo detalle una tarea de enseñanza tanto desde la perspectiva del contenido y su estructura como desde la perspectiva del alumno.
- ✓ Solventa la limitación que supone no contar con una práctica real.
- ✓ Inculca en los EPM imágenes que se contraponen a sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Primaria.

El vídeo de clases reales tomará un papel fundamental dentro de esta investigación, pues será el medio para propiciar el análisis de la práctica real sobre la enseñanza del concepto de polígono, el cual será nuestra mayor fuente de información.

### ***Mathematical Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)***

El MTSK (Carrillo et al., 2013) es un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas que nos permitirá poner el foco de atención en el conocimiento que los EPM activan durante el análisis de una situación real de enseñanza-aprendizaje (Climent et al., 2016). Podemos situar los antecedentes principales del MTSK en los trabajos de Lee Shulman (1986) y el modelo propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

El MTSK “considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral en todas sus subdimensiones y evita hacer alusión a referentes externos” (Flores, Escudero, Montes, Aguilar y Carrillo, 2016, p.57). Por otra parte, mantiene la consideración de dos dimensiones de conocimiento: *conocimiento matemático (MK)* y *conocimiento didáctico*

*matemático (PCK)*. Cada uno de estos dominios se divide en subdominios que tratamos de explicar a continuación. El *Conocimiento Matemático*, hace alusión a la necesidad del profesor de poseer un conocimiento matemático sólido para promover en sus alumnos un aprendizaje significativo de los contenidos (Aguilar, 2016). Se divide en los siguientes subdominios:

- ✓ *Conocimiento de los temas (KoT)*: supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados. Categorías<sup>1</sup>: definiciones, propiedades y sus fundamentos (citamos en este caso solo la referida a nuestro objeto de estudio).
- ✓ *Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)*: conocimiento sobre las relaciones entre distintos contenidos matemáticos. Categorías: conexiones de complejización; conexiones de simplificación; conexiones transversales y conexiones auxiliares.
- ✓ *Conocimiento de la práctica matemáticas (KPM)*: se relaciona con la capacidad del/a docente para generar conocimiento en matemáticas. Categorías: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (citamos en este caso solo la referida a nuestro objeto de estudio).

El *conocimiento didáctico del contenido*, considera el conocimiento didáctico ligado a la labor de enseñar y diferencia tres subdominios:

- ✓ *Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)*: derivadas de su interacción con el contenido matemático. Categorías: fortalezas y dificultades; formas de interacción con el contenido matemático; teorías sobre aprendizaje; e intereses y expectativas.
- ✓ *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)*: conocimiento de recursos, materiales, maneras de representar un contenido, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado. Se incluyen las teorías sobre enseñanza.
- ✓ *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)*: conocimiento del/a profesor/a sobre los que los/as alumnos/as deben aprender en un determinado nivel académico, pudiendo venir marcado por el currículo escolar. Categorías: expectativas de aprendizaje; nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado; y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

---

<sup>1</sup> El sistema de categorías que se presenta en cada subdominio surge de la reflexión teórica y de los datos empíricos con los que se ha trabajado. No se trata de una categorización exhaustiva, pero recoge los datos con los que se cuenta (Flores et al., 2016). Por razones de espacio solo citamos las categorías, que pueden encontrarse descritas en Carrillo et al. (2018).

## METODOLOGÍA

Atendiendo a nuestro interés en profundizar en el conocimiento especializado de la muestra seleccionada, decidimos abordar un estudio de caso, dentro de un paradigma interpretativo, según Stake (2000), citado en Muñoz-Catalán (2009). Los datos se categorizarán con el MTSK. La investigación se desarrolló en un grupo de estudiantes de 4º del grado de maestro en la Universidad de Huelva, de la materia *Didáctica de la matemática en la educación primaria: las formas, las figuras y sus propiedades*. El grupo estaba constituido por 70 alumnos, de los que 58 entregaron datos para esta investigación. La información se recogió durante el desarrollo habitual de las sesiones, como tareas de la materia. El formador de este grupo de estudiantes era un formador del área de Didáctica de la Matemática, con más de 30 años de experiencia en dicha formación.

### *Instrumentos de recogida de información*

El principal instrumento de recogida de información es la tarea realizada por los EPM. Los EPM visualizaron y analizaron, individualmente, las grabaciones de una clase de 5º de primaria donde se trabajaba la definición de polígono. Para analizar la sesión los EPM contaban con una plantilla que debían completar (en la figura 1 se muestra su estructura y algunos de los aspectos que se les pide considerar).

Figura 1. Plantilla de observación.

Aspectos a observar	QUÉ SUCEDE (descripción de lo que ocurre en el aula)	QUÉ INTERPRETO
1. Estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos. Ideas intuitivas		
2. Contenidos que se trabajan y en qué se pone énfasis		
3. Recurso usados: Ventajas e inconvenientes		

Fuente: proyecto de innovación 2016/2018.

Las sesiones donde se desarrolló esta tarea fueron grabadas y transcritas para su posterior análisis. Contamos por tanto con las plantillas entregadas por cada alumno (completadas durante las sesiones formativas) y las videograbaciones de dichas sesiones.

## Análisis de la información

Antes de analizar la información de las producciones<sup>2</sup>, se elaboró una tabla (tabla 1) donde recogimos algunos indicadores de conocimiento que esperábamos que movilizaran los EPM durante el desarrollo de la tarea. Dichos indicadores se han usado únicamente como una primera aproximación de posibles resultados.

Tabla 1. Conocimiento especializado movilizado esperado.

	Subdominios	Categorías	Indicadores
<b>CONOCIMIENTO MATEMÁTICO</b>	<b>KoT</b>	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	Conoce la clasificación de figuras planas (poligonales y no poligonales). Posee conocimiento sobre la definición de polígono usada en primaria, sus propiedades y fundamentos.
		Registro de representación	Reconoce representaciones no prototípicas de las figuras geométricas planas.
	<b>KSM</b>	Conexiones de complejización	Establece conexiones con contenidos de índole superior: figuras tridimensionales.
	<b>KPM</b>	Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Conoce que una definición debe ser no contradictoria, no ambigua.... Moviliza conocimiento sobre el uso de criterios de exclusión e inclusión para crear una definición.
<b>CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL CONTENIDO</b>	<b>KFLM</b>	Fortalezas y dificultades	Aprecia las dificultades de los alumnos/as para clasificar las figuras. Conoce las dificultades de los/as alumnos/as para construir la definición de polígono.
		Formas de interacción con un contenido matemático	Presta atención a como construyen la definición de polígono los alumnos. Reflexiona sobre cómo los alumnos llegan a la clasificación de las figuras.
	<b>KMT</b>	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Conoce ejemplos y contraejemplos de figuras poligonales. Reconoce la finalidad de la tarea propuesta.
		Recursos materiales y virtuales	Conoce la efectividad de los elementos materiales para la mejora de la comprensión de un contenido.
	<b>KMLS</b>	Secuenciación con temas anteriores y posteriores	Conoce que términos como ángulos, los vértices, las rectas y las curvas se deben haber trabajado con anterioridad.
		Expectativas de aprendizaje	Tiene conocimiento sobre el papel que tiene el contenido “concepto de polígono” dentro del currículo de Primaria.

Fuente: elaboración propia.

<sup>2</sup> Cuando hablamos de producciones nos estamos refiriendo a la tarea de completar la plantilla de análisis del vídeo que los EPM realizan.

Posteriormente, para el análisis de las sesiones donde tuvo lugar la recogida de información se realizó una transcripción literal de las filmaciones de estas sesiones, con el propósito de identificar aquellos episodios que nos permitiesen visualizar evidencias e indicios de los conocimientos movilizados por los EPM. Este conocimiento detectado en las transcripciones completará el análisis de las producciones de la tarea realizada por los EPM. No obstante, hay que señalar que estas transcripciones no han aportado toda la información que se esperaba a nuestra investigación. El análisis de estas transcripciones se realizó de forma lineal, a cada episodio que nos proporcionaba información, se le asignaba uno o varios subdominios del MTSK, que en el último paso del análisis se relacionarán con los resultados obtenidos de las producciones.

Tras el análisis de las transcripciones pasamos a un análisis vertical<sup>3</sup> de las producciones realizadas por los EPM. Para facilitar el análisis realizamos unas primeras agrupaciones, organizando la información en tablas (figura 2), una tabla por cada uno de los ítems que se incluye en la plantilla de análisis (por ejemplo, *estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos*), donde se incluye, como se muestra en el gráfico: la reflexión del EPM en relación al ítem por el que se pregunta, el código de identificación del EPM que se corresponde con sus iniciales y con el número de orden y el subdominio o subdominios del conocimiento especializado que se le asigna a su reflexión junto a una justificación de esa asignación.

Figura 2. Organización de los datos en tablas segregadas por ítems.

Nombre: Sandra Doque Arellano ..... Turno: 3.....  
 Plantilla de Observación de una sesión de matemáticas de Primaria: Actividad 1 (parte 1)


 Universidad de Huelva

**Producciones realizadas por los EPM**

Aspectos a observar	QUÉ SUCEDE (descripción de lo que ocurre en el aula)	QUÉ INTERPRETO
1. Estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos. Ideas intuitivas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- El primer alumno no comprende que dos triángulos rectángulos forman un rectángulo</li> <li>- Presentan dificultad para nombrar de qué tipo de triángulos se trata.</li> <li>- Idea intuitiva: Saben que todo aquello que tiene forma circular pertenece a otro grupo (no poligonal)</li> </ul>	Al principio los alumnos no saben qué figuras van a salir, por lo que no tienen definidos los grupos existentes. Hasta que no aparece la primera figura circular, los niños no saben cómo clasificar las figuras

**Ítem 1 de la plantilla de análisis sobre estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos**

Nº	Alumno	INFORMACIÓN	JUSTIFICACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO ASIGNADO A LA REFLEXIÓN	CONOCIMIENTO QUE SE MOVILIZA
4	S.D.A	“Al principio los alumnos no saben qué figuras van a salir, por lo que no tienen definidos los grupos existentes. Hasta que no aparece la primera figura circular, los niños no saben cómo clasificar las figuras”	Se observa como este EPM justifica el hecho de que el alumno no pueda clasificar las figuras por una falta de criterios para su clasificación y no tener una idea previa de las figuras que se le va a presentar. Observa como los alumnos son capaces de clasificar cuando se le presenta una figura circular. Además, observo que ofrece una ligera idea sobre el concepto de polígono pues ofrece alguna característica, en este caso la forma de sus lados (no recto).	Los alumnos no pueden clasificar por no saber qué conjunto de figuras hay (KFLM dificultades)  Los alumnos diferencian la figura circular como no polígono (KFLM formas de interacción)  Las figuras circulares no son polígonos (KoI, props., def. y fórm.)

**Tablas de organización de la información para el análisis de las reflexiones de cada uno de los EPM por cada uno de los ítems de la plantilla de análisis**

Fuente: elaboración propia.

<sup>3</sup> Le llamamos vertical, inspirándonos en Carrillo (1997) y Contreras (1999), porque comparamos los indicadores que describen ideas similares de los EPM y su asignación a subdominios y categorías. En nuestro caso la coherencia no se busca en los indicadores de un mismo informante sino en relación con un mismo ítem de la plantilla de análisis.

El análisis de las producciones de los EPM se llevó a cabo de manera lineal, asignando uno o varios subdominios del MTSK a cada reflexión de los EPM. Durante este primer análisis se llevó a cabo, lo que Massot, Dorio y Sabadiego (2009) denominan *reducción de la información* pues tratamos de buscar indicadores que resumen la información común extraída y que faciliten la segregación posterior en tablas independientes para cada uno de los subdominios y categorías del MTSK. Este primer análisis de las producciones de los EPM se llevó a cabo, en un primer momento, por la investigadora principal quién durante el proceso de análisis está en constante reflexión cuestionándose cómo justificar todas las decisiones que toma (sirva de ejemplo la columna “*justificación del conocimiento especializado asignado a la reflexión*” del gráfico de la figura 2) en cuanto a la asignación de una u otra categoría. No obstante, con el objetivo de que el análisis fuera lo más exacto y riguroso posible se han llevado a cabo sesiones de debate con la intervención de la directora de esta investigación quién actuaba como coinvestigadora realizando aportes científicos y operativos en cuanto a la asignación de una u otra categoría o subdominio.

El siguiente paso del análisis consistió en segregar la información de cada una de las tablas de organización en tablas independientes para cada uno de los subdominios, categorías e indicadores del MTSK (figura 3) las cuales me han servido, además de para extraer los resultados de manera más detallada para realizar un análisis horizontal<sup>4</sup> de los datos.

Figura 3. Información organizada por subdominios y categorías.

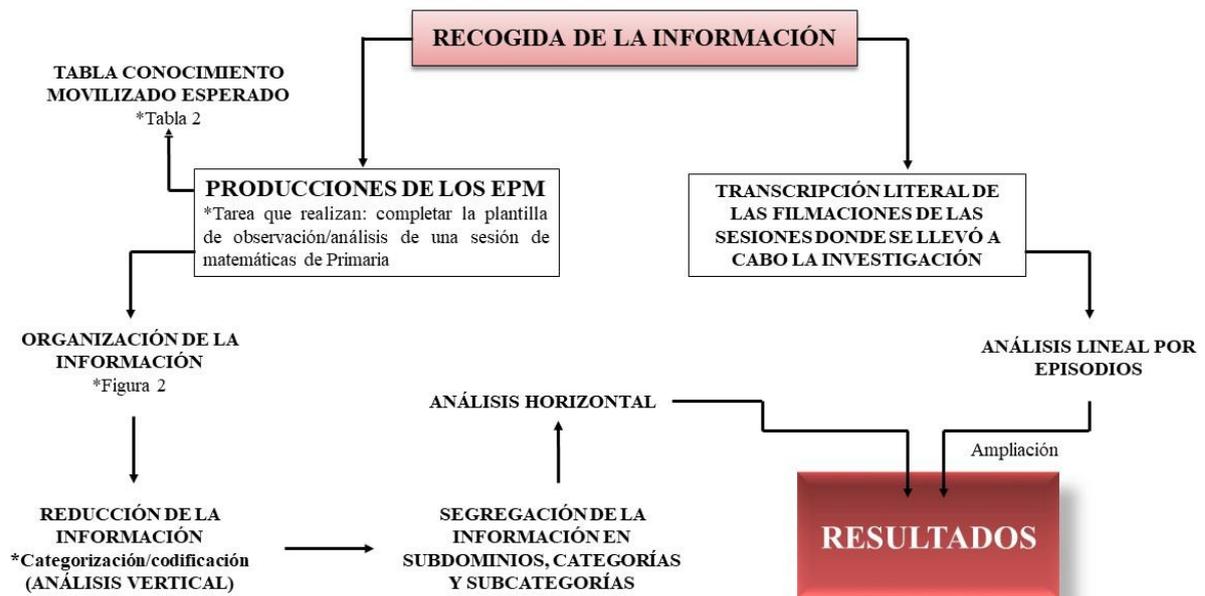
Sub	Categoría	Evidencia-índice	
		Unidad de información	Indicador
KoT	Definición, propiedades y sus fundamentos	EM.G.T1.1. “...el primer alumno en un primer momento no iba a clasificar el triángulo con el rectángulo, imagino que por el número de lados”	Los polígonos se pueden clasificar por el nº de lados (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos)
		F.C.R. T1.2. “La clasificación de polígonos se podría organizar en subcategorías con semejanzas”	Los polígonos se pueden clasificar en subcategorías, según semejanzas (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos)
		F.D.D. T1.1. “Los compañeros le ayudan viendo las similitudes. Podría haberlos clasificado en cuadriláteros y triángulos al no tener patrones de clasificación”	Las figuras geométricas pueden tomar otra clasificación que no sea polígono/no polígono (KoT; definición, propiedades y sus fundamentos)
		M.R.C. T1.1. “Al dejar la actividad en la intuición de los niños es posible que la clasificación hubiera tomado otro sentido” B.C.C. T1.1. “Los alumnos en 5º no saben clasificar las figuras por cualquier otra propiedad más completa”	
Sub	Categoría	Evidencia-índice	
		Unidad de información	Indicador
KFLM	Fortalezas y dificultades	EM.G.T1.1. “Los alumnos no tienen afianzados los conocimientos sobre polígonos” F.J.P.C. T1.1. “Realmente no conocen la definición de polígono y el por qué estas figuras son polígonos” A.M.M.R. T1.1. “Los alumnos no acaban de aprender el concepto de polígono” R.P.B. T1.1. “Los alumnos tienen confusiones respecto a algunas figuras, y creen que algunas no poligonales son poligonales” J.M.B.T1.1. “Presentan dificultades cuando observan una figura con una línea poligonal” M.E.R. S. T1.1. “Los alumnos asemejan los polígonos irregulares como figuras poligonales” F.C.R. T1.2.	Los alumnos en este nivel no dominan el concepto de polígono (KFLM; dificultades)
		B.C.C. T1.1. “Tienen dificultades para establecer que los extremos de los lados están unidos y el polígono cerrado”	Los alumnos no poseen la idea de que los lados de un polígono se unen y forman una figura cerrada (KFLM; dificultades)
Sub	Categoría	Evidencia-índice	
		Unidad de información	Indicador
KMLS	Secuenciación con temas anteriores y posteriores	B.C.C. T1.1. “Los alumnos en 5º no saben clasificar las figuras por cualquier otra propiedad más compleja propia de los niveles superiores de la etapa”	El conocimiento de propiedades más complejas corresponden a niveles superiores al tercer ciclo (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		F.D.D. T1.1 y 2. “En 6º estos conocimientos deben estar adquiridos para poder pasar a áreas y perímetros” E.R.S. T1.1 y 2. “(…)es en 6º cuando se trabaja área/perímetro”	Los contenidos de área y perímetro se trabaja posteriormente al concepto de polígono (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		R.P.L. T1.1. “Los alumnos están haciendo un recordatorio de las figuras planas que ya han dado”	Las figuras planas es un contenido trabajado en cursos anteriores al tercer ciclo (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		F.D.D. T1.1 y 2. “El alumno en 5º de primaria debe aprender a diferenciar entre que es un polígono y que no lo es. Para después poder diferenciar cuales de los polígonos son regulares y cuales irregulares”	La clasificación entre polígonos y no polígonos precede al contenido de polígonos regulares e irregulares (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
Sub	Categoría	Evidencia-índice	
		Unidad de información	Indicador
KMT	Recursos materiales y virtuales	F.D.D. T1.1. “Los alumnos construyen una definición de figuras poligonales a partir de los conocimientos que tienen y el refuerzo visual de las figuras de la pizarra”	El material usado por el maestro supo un refuerzo visual que facilita a los alumnos la construcción del concepto de polígono (KMT; recursos material y virtuales)
		B.D.M. T1.1. “Podría haber utilizado figuras macizas”	Un material alternativo podrían haber sido figuras macizas (KMT; recursos materiales y virtuales)
		J.C.L. T1.1 “Como ventaja es que las figuras son manipulables y los alumnos visualizan mejor las figuras” M.C.J.C. T1.1. “Al ser figuras manipulables los alumnos ven mejor las características de las figuras para distinguirlas”	El recurso empleado facilita la visualización y distinción entre figura por su carácter móvil y manipulable (KMT; recursos materiales y virtuales)

Fuente: elaboración propia.

<sup>4</sup> Usamos análisis horizontal en el mismo sentido que Carrillo (1997) y Contreras (1999) pero en esta ocasión comparamos indicador por indicador con la misma intención del análisis vertical.

Una vez realizado tanto el análisis de las producciones de los EPM como el análisis de las transcripciones se procedió a relacionar la información obtenida de ambas fuentes, sirviendo los resultados de las transcripciones como ampliación de los resultados de las producciones. A continuación, presentamos un esquema que resume los pasos del análisis.

Figura 4. Esquema del análisis de la información.



Fuente: elaboración propia.

## RESULTADOS

Los resultados se presentarán organizándolos en subdominios; primero los referidos al conocimiento matemático y, después, los referidos al *conocimiento didáctico del contenido*. Distinguiremos, a su vez, las categorías que constituyen cada uno de los subdominios, estableciendo distinción entre sus indicadores. Además, aportaremos unidades de información que ilustran el conocimiento que se moviliza. Al final de la redacción de los resultados de cada categoría se aportará una tabla con todos los indicadores de dicha categoría.

El conocimiento especializado movilizado por los EPM en relación al *conocimiento matemático*, ha sido sobre los tres subdominios que lo compone, aunque de manera muy escasa; siendo la primera categoría del primer subdominio (KoT), *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, donde mayor movilización de conocimiento hemos apreciado.

En cuanto al conocimiento movilizado sobre el KoT, ha surgido, únicamente, de la categoría *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, sin apreciarse movilización de conocimiento de las restantes categorías de este subdominio. Dentro de esta categoría el conocimiento movilizado podría dividirse en dos vertientes. Por un lado, el conocimiento sobre

el contenido matemático de polígono que les permite a los EPM conocer diferentes criterios de clasificación de estas figuras. Y, por otro lado, conocimiento sobre las propiedades de los polígonos que les facilita la interpretación de lo que ocurre en el aula y ayuda a construir la definición de polígono. Siendo esta segunda tendencia la más común entre las reflexiones de los EPM.

En líneas generales, los EPM poseen una concepción de lo que sería polígono dentro del ámbito escolar así como la definición de varios elementos que componen un polígono, que les permite conocer diferentes criterios de clasificación de los polígonos como pueden ser por el nº de lados o atendiendo a otras semejanzas tal y como expresan las siguientes reflexiones:

- E.M.G.1. *“...el primer alumno no iba a clasificar el triángulo con el rectángulo, imagino que por el número de lados”*.
- F.C.R.6. *“La clasificación de polígonos se podría organizar por semejanzas”*.

Tabla 2. Indicadores de “Definiciones, propiedades y sus fundamentos”.

<b>KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos)</b>
<b>KoT1:</b> Los polígonos se pueden clasificar por el nº de lados
<b>KoT2:</b> Los polígonos se pueden clasificar en subcategorías, según semejanzas
<b>KoT3:</b> Las figuras geométricas pueden tomar otra clasificación que no sea polígono/no polígono
<b>KoT4:</b> Las figuras planas se pueden clasificar en polígonos y no polígonos
<b>KoT5:</b> Una línea poligonal abierta, no es un polígono
<b>KoT6:</b> Los polígonos están compuestos por ángulos, lados rectos, líneas rectas
<b>KoT7:</b> Los polígonos están formados por su interior
<b>KoT8:</b> Los polígonos son figuras planas
<b>KoT9:</b> Los polígonos tienen el mismo número de lados que de ángulos
<b>KoT10:</b> Los lados de un polígono son segmentos
<b>KoT11:</b> Los lados de un polígono se unen por sus extremos y forma una figura cerrada
<b>KoT12:</b> Las figuras no poligonales pueden tener lados rectos
<b>KoT13:</b> Los polígonos pueden ser cóncavos o convexos
<b>KoT14:</b> Los sectores circulares no son polígonos
<b>KoT15:</b> Los polígonos y no polígonos se pueden identificar atendiendo a la forma de sus lados

Fuente: elaboración propia.

En cuanto al KPM, hemos evidenciado movilizaciones, únicamente, en la categoría *condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*, siendo dos los EPM que en sus reflexiones hacen alusión a definir cómo una práctica matemática.

- N.L.G.2. *“Pienso que para crear una definición no hay que hacer la diferencia con la otra clasificación para poder saber las características”*.
- N.G.Y.20. *“No creo que sea la forma más adecuada de crear una definición, solamente poniendo por lo que está compuesto un polígono”*.

En estas dos reflexiones se puede observar cómo el primer EPM determina que se puede generar la definición de polígono atendiendo únicamente a sus características (KPM1), mientras que el segundo considera que los elementos que componen un polígono no son suficientes para generar su definición (KPM2). Podemos considerar que el primer EPM excluye la negación en las definiciones matemáticas y puede hacer referencia al criterio de minimalidad. Sin embargo, no es algo que podamos asegurar, pues puede que solo se esté guiando por la economización del lenguaje. Asimismo, el segundo EPM puede estar pensando en facilitar la comprensión del concepto de polígono a los alumnos<sup>5</sup>.

Tabla 3. Indicadores de “*Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición*”.

<b>KPM (condiciones necesarias y suficientes para generar una definición)</b>
<b>KPM1:</b> Se puede generar la definición de polígono atendiendo únicamente a sus características
<b>KPM2:</b> Los elementos que componen un polígono no son suficientes para generar su definición

Fuente: elaboración propia.

El segundo dominio del MTSK, *conocimiento didáctico del contenido*, ha sido donde más movilización de conocimiento hemos evidenciado. Y dentro de este dominio, el subdominio KMT la categoría de los *ejemplos* ha sido el que con mayor frecuencia ha aparecido en nuestro análisis. Seguidamente, el subdominio *Características de Aprendizaje* (KFLM) inherentes al contenido del concepto de polígono es el conocimiento más movilizad, especialmente, la categoría de las *dificultades*.

Gran parte de los EPM prestan atención a cómo los alumnos de Primaria interactúan con el contenido matemático trabajado o cuáles son las fortalezas de su aprendizaje; pero sobretodo, a qué dificultades parecen tener.

En relación a las dificultades hay tres tendencias. En primer lugar, muchos consideran que los alumnos no dominan completamente el concepto de polígono (KFLM/D1) suponiendo un importante obstáculo en su aprendizaje:

- E.M.G.1. “*Los alumnos no tienen afianzado el concepto de polígonos*”.
- A.A.M.30. “*El alumno no tiene claro las características de los polígonos*”.

En segundo lugar, identifican dificultades de los alumnos a la hora de clasificar, y aquí, la mayoría de los EPM comparten que los alumnos no pueden clasificar las figuras porque el

<sup>5</sup> Con alumnos nos estamos refiriendo a los discentes de 5º de Primaria.

maestro no ha ofrecido criterio de clasificación (KFLM/D7). Entre las reflexiones de los EPM destacamos:

- C.D.R.25. *“El criterio dado por el maestro es bastante amplio, el alumnado necesita una explicación más detallada”*.

Además, hay otras dificultades que presentan los alumnos a la hora de clasificar, según los EPM. Por ejemplo, B.B.C.7 expone que *“No es capaz de relacionar propiedades y características entre varias figuras, lo que no le permite clasificar”*, que podría resumirse cómo: los alumnos no pueden clasificar porque no son capaces de relacionar propiedades y características entre las figuras (KFLM/D11). Y en relación a esta dificultad podría estar la que exponen varios EPM, como EMG.1: *“El primer alumno no iba a clasificar el triángulo con el rectángulo, imagino que por el número de lados”*, es decir, para los alumnos es poco natural clasificar en un mismo grupo polígonos con distinto número de lados (KFLM/D12).

Y, en tercer lugar, hay EPM que moviliza conocimiento sobre dificultades de los alumnos en relación a las figuras que se les presentan. Algunos EPM exponen que el número limitado de ejemplos puede suponer un problema para los alumnos ya que estos podrían pensar que son los únicos polígonos existentes (KFLM/D19). En cambio, otros EPM prestan más atención a la incidencia de las figuras prototípicas y consideran que los alumnos no reconocen una figura presentada en posición distinta a la habitual (KFLM/D18) expresándolo de la siguiente manera:

- B.D.M.31: *“Los alumnos dudaron por la posición del triángulo”*.

Tabla 4. Indicadores de “Dificultades”.

<b>KFLM (dificultades)</b>
<b>KFLM/D1:</b> Los alumnos en este nivel no dominan el concepto de polígono
<b>KFLM/D2:</b> Los alumnos no poseen la idea de que los lados de un polígono se unen y forman una figura cerrada
<b>KFLM/D3:</b> Los alumnos no poseen los conceptos de bordes, interior y exterior de una figura
<b>KFLM/D4:</b> Para los alumnos es poco relevante que un polígono tenga el mismo n° de lados que de ángulos
<b>KFLM/D5:</b> Los aspecto en común de los polígonos y de los no polígonos suponen un problema para los alumnos
<b>KFLM/D6:</b> Los alumnos solo reconocen como polígonos las figuras regulares
<b>KFLM/D7:</b> Para los alumnos todas las figuras con lados rectos son polígonos
<b>KFLM/D8:</b> Los alumnos no poseen muchos conocimientos sobre geometría
<b>KFLM/D9:</b> Los alumnos no tienen adquirido el concepto de lado
<b>KFLM/D10:</b> Los alumnos en este nivel no dominan los tipos de figuras geométrica existentes
<b>KFLM/D11:</b> Los alumnos no relacionan propiedades y características entre las figuras geométricas planas
<b>KFLM/D12:</b> Para los alumnos es poco natural clasificar en un mismo grupo polígonos con distinto n° de lados
<b>KFLM/D13:</b> Para los alumnos no es acertado clasificar en un mismo grupo figuras con lados de distinto tamaño
<b>KFLM/D14:</b> Para los alumnos no es adecuado clasificar en un mismo grupos figuras con lados de diferente forma
<b>KFLM/D15:</b> Para los alumnos no es adecuado clasificar en un mismo grupo dos figuras aparentemente distintas
<b>KFLM/D16:</b> Los alumnos no son capaces de clasificar las figuras porque no conocen el conjunto de figuras que se le va a presentar
<b>KFLM/D17:</b> Los alumnos no pueden clasificar las figuras porque no se les han ofrecido un criterio claro de clasificación
<b>KFLM/D18:</b> Los alumnos no reconocen una figura presentada en posición distinta a la habitual
<b>KFLM/D19:</b> El n° limitado de ejemplos puede hacer creer a los alumnos que esas son los únicos polígonos existentes
<b>KFLM/D20:</b> Los alumnos no son capaces de diferenciar entre triángulo y sector circular
<b>KFLM/D21:</b> Resulta complejo para los alumnos atender a más de una característica a la vez para clasificar las figuras
<b>KFLM/D22:</b> Los alumnos no conocen el nombre de las figuras

Fuente: elaboración propia.

También, hay EPM que hacen referencia a las potencialidades de los alumnos. La mayoría de las *fortalezas* que aparecen hacen alusión al conocimiento que los alumnos tienen sobre el concepto de polígono y sus propiedades, pudiéndose resumir en: los alumnos saben que los polígonos tienen sus lados rectos, tienen ángulos y vértices (KFLM/F2).

Tabla 5. Indicadores de “Fortalezas”.

<b>KFLM (fortalezas)</b>
<b>KFLM/F1:</b> Los alumnos saben que los polígonos tienen sus lados rectos
<b>KFLM/F2:</b> Los alumnos saben que los polígonos tienen sus lados rectos, tienen ángulos y vértices
<b>KFLM/F3:</b> Los alumnos diferencian correctamente las figuras con lados rectos de las figuras con lados curvos
<b>KFLM/F4:</b> Los alumnos conocen las figuras presentadas y sus propiedades

Fuente: elaboración propia.

Por último, en la categoría, *forma de interacción de los alumnos con el concepto de polígono*, la mayoría de las reflexiones se refieren a cómo clasifican los alumnos. La clasificación que más ha captado la atención de los EPM tiene que ver con que los alumnos clasifican las figuras en polígonos y no polígonos realizando una comparación entre ellas (KFLM/FI1) y así lo expresan algunos EPM:

- R.L.E.16. “Concretamente realizan dos grupos. Por un lado, figuras no poligonales y por otro, las poligonales”.

Tabla 6. Indicadores de “Formas de interacción”.

<b>KFLM (formas de interacción)</b>
<b>KFLM/FI1:</b> Los alumnos clasifican las figuras en polígonos y no polígonos realizando una comparación entre ellas
<b>KFLM/FI2:</b> Los alumnos entienden que la clasificación debe ser dicotómica
<b>KFLM/FI3:</b> Los alumnos clasifican las figuras según si sus lados son rectos o curvos
<b>KFLM/FI4:</b> Los alumnos clasifican la circunferencia como no poligonal porque posee lados curvos
<b>KFLM/FI5:</b> Los alumnos construyen la definición de polígono centrándose en los elementos que lo compone
<b>KFLM/FI6:</b> Los alumnos se centran en las figuras que le resultan más familiares para establecer una clasificación
<b>KFLM/FI7:</b> Los alumnos coinciden en la característica “lados rectos” porque la han observado repetida en varias figuras
<b>KFLM/FI8:</b> Los alumnos relacionan el sector circular con una porción de pizza
<b>KFLM/FI9:</b> Los alumnos asocian las figuras a elementos de la vida cotidiana

Fuente: elaboración propia.

Dentro del subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) hemos evidenciado movilizaciones de conocimiento especializado en todas sus categorías, excepto en la categoría *teorías de enseñanza*.

En líneas generales, en relación a las *estrategias* los EPM hacen referencia a la forma de trabajar el concepto de polígono, es decir, a que la definición de polígono es construida por los propios alumnos (KMT/ES1), dejando atrás una metodología transmisiva y poco motivadora:

- A.M.A.40. “Abandona las definiciones abstractas de los libros, son los propios alumnos quienes crean una definición”.

Hay otros aspectos que captan la atención de los EPM y que les permiten movilizar KMT (estrategias). O.O.O.5 expone que “El maestro guía a los alumnos para que coloquen las figuras en el lado de los polígonos”, fijándose en que el maestro, guía a los alumnos para que se centren, principalmente, en los polígonos (KFLM/ES1). Asimismo, B.D.M.31 expresa que “El maestro (...) primero dejó separar en varios (sin decir cuántos) grupos cuando se separaron en dos grupos (...)” haciendo hincapié en el hecho de que el maestro no establece un número concreto de grupos para clasificar las figuras, dejando a los alumnos libertad para clasificar según su criterio (KMT/ES2).

Este tópico también aparece en las transcripciones. Se refuerza la idea de estrategias empleadas por el maestro para que los alumnos se fijen en el grupo de los polígonos [126-129]. Y, surge una nueva idea, una EPM considera que la estrategia empleada por el maestro hace rectificar al alumno en la clasificación [A3; 131-138]. Sin embargo, pone en duda que sea la mejor opción para enseñar el concepto de polígono.

Tabla 7. Indicadores de “Estrategias”.

<b>KMT (estrategias)</b>
<b>KMT/ES1:</b> El maestro guía a los/as alumnos/as para que se fijen, principalmente, en el grupo de polígonos
<b>KMT/ES2:</b> El maestro no establece un número concreto de grupos para clasificar las figuras
<b>KMT/ES3:</b> La definición de polígono es construida por los propios alumnos
<b>KMT/ES4:</b> La definición de polígono se va construyendo a partir de las características de los polígonos
<b>KMT/ES5:</b> La disyuntiva entre borde e interior puede usarse para construir la definición de polígono
<b>KMT/ES6:</b> El maestro adecua el lenguaje empleado al curso y contenido trabajado
<b>KMT/ES7:</b> El maestro utiliza las preguntas como medio para construir la definición
<b>KMT/ES8:</b> Los alumnos van estableciendo una clasificación entre todos según sus propias aportaciones
<b>KMT/ES9:</b> El maestro adapta el lenguaje al nivel y conocimientos de los alumnos
<b>KMT/ES10:</b> El uso de los conceptos de lado y ángulo puede ayudar a construir la definición de polígono

Fuente: elaboración propia.

En cuanto a la categoría *recursos materiales*, hay una opinión generalizada: es un recurso que se sale del uso habitual del libro, de fácil y rápida elaboración y que facilita a los alumnos la visualización de las características de las figuras (KMT/M2). Además, también se destaca como una ventaja su carácter manipulativo y la capacidad para poder hacer una gran variedad

de figuras (KMT/M3). Únicamente un EPM ofrece la idea de un material alternativo al propuesto por el maestro, el uso de figuras macizas (KMT/M2).

Tabla 8. Indicadores de “*Recursos materiales y virtuales*”.

<b>KMT (recursos materiales y virtuales)</b>
<b>KMT/M1:</b> El material usado por el maestro supone un refuerzo visual que facilita a los alumnos la construcción del concepto de polígono
<b>KMT/M2:</b> Un material alternativo podrían haber sido figuras macizas
<b>KMT/M3:</b> El recurso empleado facilita la visualización y distinción entre figuras por su carácter móvil y manipulable

Fuente: elaboración propia.

Y, como última categoría del KMT, hemos encontrado movilizaciones de conocimiento en referencia a la *tarea*. Y, aquí, llama la atención cómo para algunos EPM la tarea es acertada y novedosa para construir el concepto de polígono (KMT/T2), tal y como expresa F.J.P.C.8. “*Es recomendable para que los niños conozcan la definición de polígono, no plasmada y dada, sino reflexionándola*”. Y, en cambio, para otros la tarea desarrollada no es suficiente para construir la definición de polígono (KMT/T1). La idea que más se repite sobre la tarea hace alusión a su objetivo, estableciendo que la finalidad de la tarea es construir el concepto de polígono, diferenciándolos de los no polígonos (KMT/T3):

- CH.21. “*Con la actividad se quiere llegar a dos grupos: las figuras poligonales y las figuras no poligonales y así construir la definición de polígono*”.

El análisis de las transcripciones nos hace pensar que esta idea viene motivada por algunas de las intervenciones del formador [P10;50-53 y P11;58-59], en las cuales comenta cual es el objetivo de esta actividad y añade textualmente “*construir entre todos la definición de polígono*”.

Tabla 9. Indicadores de “*Tareas*”.

<b>KMT (tareas)</b>
<b>KMT/T1:</b> La tarea desarrollada no es suficiente para construir la definición de polígono
<b>KMT/T2:</b> La actividad empleada es acertada y novedosa para construir el concepto de polígono
<b>KMT/T3:</b> La finalidad de la actividad es construir el concepto de polígono, diferenciándolos de los no polígonos
<b>KMT/T4:</b> La finalidad de la actividad es adquirir conocimientos básicos sobre geometría

Fuente: elaboración propia.

El conocimiento especializado que con mayor frecuencia han movilizado los EPM es sobre los *ejemplos*. Este conocimiento podría ordenarse en 6 grupos, ya que a pesar de que

dentro de cada uno de estos grupos se hace alusión a aspectos muy específicos, guardan un elemento en común.

El primer grupo se refiere a los ejemplos que aparecen en los libros de texto mostrando un desacuerdo con dichos ejemplos. Señalan que los ejemplos de polígonos que normalmente aparecen en los libros de texto son escasos (KMT/E1) y que ocasionan dificultades en los alumnos por ser poco diversos y prototípicos (KMT/E2). Dos ejemplos de este conocimiento serían las siguientes reflexiones:

- E.R.S.39. “...En el libro de texto enseñan lo qué es un polígono y ponen algunas figuras, nada más”.
- C.F.42. “Siempre con los mismo ejemplos y escasos en los libros de texto”.

El segundo grupo se centra en los ejemplos propuestos en el aula. Por un lado, hay EPM que enfocan sus reflexiones en la finalidad o en las posibilidades que ofrece a los alumnos esos ejemplos. Y, por otro lado, hay EPM que se centran en las ventajas o desventajas de los ejemplos usados.

En cuanto a la utilidad de los ejemplos algunos EPM afirman que sirven para confirmar/refutar las características de los polígonos (KMT/E3) y aseguran que los ejemplos propuestos son de gran ayuda para la construcción del concepto de polígono (KMT/E4). Y en cuanto a los beneficios y desventajas de los ejemplos presentados, hay cierta discrepancia, aunque es cierto que se aprecian, en mayor medida, ventajas y beneficios que desventajas. Dentro de estos aspectos positivos, el más repetido es que los ejemplos presentados (tanto de polígonos como de no polígonos) son acertados, variados y suficientes para la construcción del concepto de polígono (KMT/E6):

- M.C.J.C.3: “Ejemplos variados y abundantes”.

Hay EPM que discrepan con esta idea considerando que el conjunto de ejemplos es insuficiente e inadecuado pues no recoge la variedad de los polígonos y faltan no ejemplos (KMT/E20), como bien expresa:

- M.G.M.1: “Hay ejemplos que no se muestran y serían interesantes”.

C.F.42 expresa lo siguiente: “Los ejemplos no son los típicos que aparecen en los libros de texto” de aquí podemos extraer que el EPM ve un aspecto positivo el hecho de que los ejemplos presentados posean un carácter novedoso y no prototípico (KMT/E8). Y este es otro aspecto donde existe discrepancia entre los EPM, puesto que el EPM, I.T.D.46 expone en su

reflexión: *“Las figuras utilizadas salen de manera frecuente en los libros”* en la cual podemos observar que considera que los ejemplos usados son demasiado prototípicos (KMT/E9).

El tercer grupo hace alusión a cómo benefician o perjudican los ejemplos propuestos el aprendizaje de los alumnos. Dentro de este grupo, hemos evidenciado un único beneficio que aparece de manera repetitiva y hace alusión a que los ejemplos presentados son comunes y fácilmente reconocibles por los alumnos (KMT/E7). Por lo contrario, hay varios EPM que ven una desventaja en los ejemplos propuestos, ya que consideran que los alumnos podrían no identificar otras figuras fuera de los ejemplos propuestos debido a que se presenta una cantidad acotada de figuras (KMT/E9).

El cuarto grupo tiene que ver con los ejemplos de la vida cotidiana del alumno. Existe cierta tendencia entre los EPM en considerar que sería conveniente el uso de ejemplos cercanos al contexto del alumno (KMT/E11), ya que esto facilitaría su aprendizaje.

El quinto grupo habla del número de ejemplos, el cual crea, también, cierto desacuerdo entre dos de los EPM, quienes exponen que:

- J.R.C.47: *“El profesor utiliza pocos ejemplos algo que puede considerar positivo”*.
- J.C.L.50: *“La gran variedad de ejemplos ayuda pero también puede suponer un obstáculo”*.

De estas reflexiones extraemos que el primer EPM considera que el uso de pocos ejemplos puede ayudar a profundizar en las características de las figuras (KMT/E22). mientras que el otro considera que el número de ejemplos es abundante, de este modo consideramos que el EPM cree que una variedad excesiva de ejemplos puede crear dudas en los alumnos (KMT/23).

El sexto grupo se refiere al uso de no ejemplos, y aquí se observan dos tendencias claras. Por un lado, hay un grupo de EPM que aprecian el uso de no ejemplos como un elemento útil para la construcción del concepto de polígono (KMT/E12). Dentro de estos se observa cierto descontento ante la insuficiencia del número de no ejemplos usados. Y, por otro lado, están los EPM que no encuentran útil el uso de no ejemplos para la construcción del concepto de polígono (KMT/E13).

Tabla 10. Indicadores de “Ejemplos”.

KMT (ejemplos)
<b>KMT/E1:</b> Los ejemplos de polígonos que, normalmente, aparecen en los libros de texto son escasos
<b>KMT/E2:</b> Los ejemplos usados en los libros de texto ocasionan dificultades en los alumnos por ser poco diversos y prototípicos
<b>KMT/E3:</b> Los ejemplos propuestos sirven para confirmar/refutar las características de los polígonos
<b>KMT/E4:</b> Los ejemplos propuestos son de gran ayuda para la construcción del concepto de polígono
<b>KMT/E5:</b> Los ejemplos propuestos permiten a los alumnos prestar atención a las diferentes características de los polígonos
<b>KMT/E6:</b> Los ejemplos presentados (tanto de polígono como de no polígonos) son acertados, variados y suficientes
<b>KMT/E7:</b> Los ejemplos presentados son comunes y fácilmente reconocibles por los alumnos
<b>KMT/E8:</b> Los ejemplos usados son novedosos y no prototípicos
<b>KMT/E9:</b> Los ejemplos usados son prototípicos
<b>KMT/E10:</b> Los ejemplos propuestos son fácilmente comparables con objetos de la vida cotidiana
<b>KMT/E11:</b> Sería conveniente el uso de ejemplos cercanos al contexto (de su vida cotidiana) del alumno
<b>KMT/E12:</b> El uso de no ejemplos es útil para la construcción del concepto de polígono
<b>KMT/E13:</b> El uso de no ejemplos no es útil para la construcción del concepto de polígono
<b>KMT/E14:</b> Los no ejemplos son insuficientes para que los alumnos distingan entre ambos tipos de figuras
<b>KMT/E15:</b> Se usa el ejemplo de la caja de tizas para explicar las figuras tridimensionales, como un no ejemplo
<b>KMT/E16:</b> El ejemplo de la caja de tizas puede confundir a los alumnos al compararlo con las figuras planas
<b>KMT/E17:</b> El ejemplo de la estrella se usa para incitar a los niños a observar que tiene todos sus lados iguales
<b>KMT/E18:</b> El sector circular es el principal no ejemplo usado para establecer diferencias entre polígonos y no polígonos
<b>KMT/E19:</b> Los alumnos podrían no identificar otras figuras fuera de los ejemplos propuestos
<b>KMT/E20:</b> El conjunto de ejemplos es insuficiente e inadecuado pues no recoge la variedad de los polígonos y faltan no ejemplos
<b>KMT/E21:</b> Los ejemplos que guardan cierta similitud entre ellos pueden confundir a los alumnos
<b>KMT/E22:</b> El uso de pocos ejemplos puede ayudar a profundizar en las características de las figuras
<b>KMT/E23:</b> El ejemplo del rectángulo no es adecuado
<b>KMT/E24:</b> Una variedad excesiva de ejemplos puede crear dudas en los alumnos

Fuente: elaboración propia.

El KSM es el subdominio menos representativo del conocimiento movilizado por los EPM. De hecho, solo observamos movilizaciones en la primera y última categoría de este subdominio. En cuanto al conocimiento acerca de qué contenidos matemáticos se deben enseñar en el curso en el que se está impartiendo clase, *expectativas de aprendizaje* es inexistente en la

mayoría de los EPM, solo 10 EPM saben que el contenido “*concepto de polígono*” viene establecido para el tercer ciclo en la legislación de Primaria.

Esta baja movilización de conocimiento acerca del currículo de Primaria podría explicarse de la información extraída de las transcripciones de las videograbaciones. Durante la grabación [69-71], el formador se dirige, intencionadamente, a la cámara para confirmar que la actividad relacionada con el currículo de Primaria, que podría haber orientado a los EPM no se realizó.

Tabla 11. Indicadores de “*Expectativas de aprendizaje*”.

<b>KMLS (expectativas de aprendizaje)</b>
<b>KMLS/EA1:</b> El contenido “concepto de polígono viene establecido para tercer ciclo en la legislación de primaria

Fuente: elaboración propia.

En relación a la *secuenciación con temas anteriores y posteriores*, se observa que son muchos los EPM que movilizan conocimiento acerca de los conocimientos y capacidades previas de los alumnos para enfrentar la tarea. Los EPM tiene conocimiento sobre que el concepto de polígono se comienza a trabajar en cursos anteriores al tercer ciclo, habiéndose trabajado, anteriormente, conceptos como curva o recta, así como los conceptos de lado, vértice, ángulo... para poder construir la definición de polígono (KMLS/S3-7).

Tabla 12. Indicadores de “*Secuenciación con temas anteriores y posteriores*”.

<b>KMLS (secuenciación con temas anteriores y posteriores)</b>
<b>KMLS/S1:</b> El conocimiento de propiedades más complejas corresponde a niveles superiores al tercer ciclo
<b>KMLS/S2:</b> Los contenidos de área y perímetro se trabaja posteriormente al concepto de polígono
<b>KMLS/S3:</b> Las figuras planas es un contenido trabajado en cursos anteriores al tercer ciclo
<b>KMLS/S4:</b> La clasificación entre polígonos y no polígonos precede al contenido de polígonos regulares e irregulares
<b>KMLS/S5:</b> Los alumnos deben haber trabajado los conceptos de lados, vértices, ángulo... para poder construir la definición de polígono
<b>KMLS/S6:</b> Los alumnos deben haber trabajado los conceptos de curvas y rectas para poder construir la definición de polígono
<b>KMLS/S7:</b> El concepto de polígono se comienza a trabajar en cursos anteriores al tercer ciclo

Fuente: elaboración propia.

## CONCLUSIONES

El análisis de videos de situaciones reales de enseñanza ha permitido a los EPM movilizar, sobretodo, *conocimiento didáctico del contenido* trabajado. El conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT), *estrategias, tareas y ejemplos*, ha sido el más frecuente entre las reflexiones de los EPM, principalmente, conocimiento de los *ejemplos*. Los EPM, en su mayoría, consideran los ejemplos el medio para despertar en los alumnos “la intuición respecto de algunos conceptos” (Aguilar, 2016, p.31), en nuestro caso del concepto de polígono.

En cuanto a *recursos materiales y virtuales*, el conocimiento movilizado hace referencia a las ventajas que dicho material tiene en el aprendizaje de los alumnos. En este sentido, los EPM coinciden en que el material empleado favorece el aprendizaje de los alumnos, ya que facilita la visualización y distinción entre figuras por su carácter manipulable y móvil. Podemos considerar así que los EPM comparten la idea de Carrillo y Contreras (1995): los niños deben aprender geometría observando y manipulando figuras.

En relación a la categoría de las *estrategias* los EPM identifican que se están empleando una metodología centrada en el alumno (Climent et al., 2013), con modelos de enseñanza no tradicionales. La mayoría de los EPM saben que se está construyendo el concepto de polígono a partir de sus características y sus propiedades.

De la última categoría de este subdominio, *tareas*, podemos afirmar que el análisis de videos de situaciones reales de enseñanza permite a los EPM observar de una tarea tanto sus objetivos como las posibilidades de aprendizaje que esta ofrece a los alumnos, es decir, cómo estos responden a la actividad.

El segundo conocimiento más frecuentemente movilizado ha sido el relacionado con las *características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). El análisis del video ha permitido a los EPM observar cómo interactúan los alumnos con el contenido, qué dificultades prevén y cómo aprovechan sus conocimientos (*fortalezas*) para abordar la tarea. En base a esto, podemos afirmar que estamos de acuerdo con la investigación de Climent et al. (2016) puesto que los resultados nos permiten apreciar cómo los EPM se apoyan en sus KoT para la construcción del KFLM. El conocimiento de los EPM sobre *el concepto de polígono, sus propiedades y sus fundamentos* les ha permitido apreciar las limitaciones presentes en el aprendizaje de los alumnos. No obstante, también se aprecia cómo los EPM evidencian *dificultades* en los alumnos que proceden de estrategias empleadas por el maestro como: no pueden clasificar las figuras porque el maestro no le ha dado un criterio de clasificación, o incluso dificultades asociadas a

los ejemplos (el número limitado de ejemplos puede hacer creer a los alumnos que son los únicos polígonos existentes).

Como último aspecto destacable resaltamos el conocimiento movilizado relacionado con la práctica matemática (KPM) en base a la categoría *condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones*. Y, aquí observamos que existe un alto desconocimiento entre los EPM sobre cómo se define en matemáticas. Hecho, que también podemos observar en los resultados del estudio de Oliveros (2018).

En definitiva, coincidimos con Fortuny y Rodríguez (2012) en la posibilidad que el análisis de estos vídeos ofrece: desarrollar una mirada profesional hacia la práctica docente. Además, consideramos que el uso de situaciones reales de enseñanza puede solventar la falta de práctica real (Climent et al., 2013).

La principal limitación que he podido encontrar en mi trabajo ha sido el uso del MTSK suponía un reto para mí, ya que era la primera vez que me enfrentaba a una investigación de esta naturaleza, esto supuso que al comienzo del análisis me constará trabajo identificar elementos del conocimiento especializado, y por supuesto, categorizarlos correctamente.

En relación a posibles líneas de continuidad, sería interesante poder realizar una investigación que relacionara el conocimiento especializado movilizado por el maestro, gracias al análisis de situaciones reales de enseñanza, directamente con el aprendizaje de los alumnos de Primaria. Podría compararse el aprendizaje de dos grupos sobre un mismo contenido. Un grupo donde el contenido sea impartido por un maestro, que haya recibido formación mediante el análisis de situaciones reales de enseñanza; y otro grupo donde ese mismo contenido sea impartido por un maestro cuya formación inicial se haya desarrollado por un método más tradicional. De esta forma podríamos observar la posible influencia que esta técnica podría tener sobre los EPM, directamente, y sobre los alumnos de Primaria, indirectamente.

## **BIBLIOGRAFÍA**

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de casos*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Ball, D., Thames, M.M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J. y Seago, N. (2010). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM*, 43(1), 175-187.

- Carreño, E. y Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. Gonzales, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en matemáticas XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.
- Carrillo, J. (1997). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2008). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematical teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Task in Primary Mathematics Teacher Education: purpose, use and exemplars* (Vol. 4, pp. 215-234). New York: Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Mathematics teacher specialized Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of the Eighth Congress of European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2991). Ankara: Middle East Technical University and ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M.C., Barrera, V.J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 9, 85-103.
- Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J. Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimiento y concepciones movilizan los futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13-36.
- Contreras, L.C. (1999). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problema. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Contreras, L.C. y Blanco, L. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 93-124). Cáceres: Universidad de Extremadura.

- Flores, E., Escudero, D., Montes, M.A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2016). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero, E. Flores, y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp.57-72). Huelva: Universidad de Huelva: publicaciones.
- Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-37.
- Massot, I., Dorio, I. y Sabariego, M. (2009). Estrategias de recogida y análisis de información. En R. Bisquerra (Eds.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 329-365). Madrid: La Muralla, SL.
- Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.
- Oliveros, I. (2018). *Conocimiento movilizado sobre la construcción de una definición de polígono a través del análisis de vídeo. Estudio de casos con Estudiantes para Maestros*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Huelva, España.
- Pascual, M.I., Codes, M., Martín, J.P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en matemáticas XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.
- Santagata, R. y Angelici, G. (2010). Studying the Impact of the Lesson Analysis Framework on Preservice Teacher's Abilities to Reflect on Videos of Classroom Teaching. *Journal of Teacher Education*, 61(4), 339-349.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.
- Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). They many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22(1), 91-106.