



TÍTULO

RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN RELACIONADOS CON EL
CONTENIDO MATEMÁTICO EN UNA ACTIVIDAD DE CLASIFICACIÓN
Y DISCRIMINACIÓN

=

REASONING AND ARGUMENTATION RELATED TO THE
MATHEMATICAL CONTENT IN A CLASSIFICATION AND
DISCRIMINATION ACTIVITY

AUTORA

Carmen Rubio López

	Esta edición electrónica ha sido realizada en 2024
Tutora	Dra. D ^a . Myriam Codes Valcarce
Instituciones	Universidad Internacional de Andalucía , Universidad de Huelva
Curso	<i>Máster Universitario en Investigación de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (2022/23)</i>
©	Carmen Rubio López
©	De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía
Fecha documento	2023



**Atribución-NoComercial-SinDerivadas
4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**

Para más información:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en>

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN RELACIONADOS CON EL CONTENIDO MATEMÁTICO EN UNA ACTIVIDAD DE CLASIFICACIÓN Y DISCRIMINACIÓN

REASONING AND ARGUMENTATION RELATED TO THE MATHEMATICAL
CONTENT IN A CLASSIFICATION AND DISCRIMINATION ACTIVITY



Universidad
de Huelva



Carmen Rubio López

Tutor: Myriam Codes Valcarce

RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACIÓN RELACIONADOS CON EL CONTENIDO MATEMÁTICO EN UNA ACTIVIDAD DE CLASIFICACIÓN Y DISCRIMINACIÓN

Rubio, C. y Codes, M.

RESUMEN

En el presente artículo se expone una investigación realizada acerca de la forma de argumentar del estudiante para maestro (EMP) en una actividad de clasificación y discriminación en la que hay que responder a la pregunta ¿Por qué no encaja cada una de ellas?, llamada WODB (Which One Doesn't Belong). A continuación, se trabaja de forma experimental la relación que tienen los niveles de argumentación con la forma de razonamiento del EPM y si esto tiene relación con el contenido de sus respuestas, ya que se considera interesante conocer cómo argumenta el EPM. Esta actividad ha sido realizada por 58 EPM de la Universidad de Huelva del Grado de Educación Infantil. Con una metodología cualitativa, así como el uso del Grounded Theory para el tratamiento del contenido, se ha llegado a entender y clasificar los argumentos de estos estudiantes.

PALABRAS CLAVE

Estudiante para maestro, Argumentación, WODB, Razonamiento, Educación Infantil.

ABSTRACT

This article presents research carried out on the students for teacher way of arguing in a activity of discrimination and classification called WODB (Which One Doesn't Belong). To continue, we experimentally work on the relationship that the levels of argument have with the EPM's form of reasoning and if this has a relationship with the content of its responses. This activity has been carried out at 58 EPM of the University of Huelva of the Early Childhood Education Degree. With a qualitative methodology, as well as the use of Grounded Theory to treat the content, the aim is to understand and classify the arguments that these students.

KEYWORDS

Student for teacher, Argumentation, WODB, Reasoning, Early Childhood Education

INTRODUCCIÓN

Como aporta Shulman y tanto autores como teorías posteriores, consideramos que es necesario que un profesor entienda el *porqué* y el *qué* de los contenidos que enseña. Además, conocer *cómo* los maneja y los trabaja de forma matemática, ya que este conocimiento está ahí para ser transmitido a los estudiantes de forma que, ellos, encuentren sentido a la matemática (Aguilar et al., 2013).

El profesor debe entender y conocer los contenidos matemáticos escolares, comprendiendo sus propiedades y significados de forma fundamentada, así como los procedimientos, las formas de representación y los estándares que se usan cuando se aborda un contenido, entre otros (Carrillo, 2013).

La argumentación tiene un papel importante en la enseñanza de las matemáticas. Esta debe ser tratada y apoyada con el fin de que el alumno desarrolle capacidades (Duval, 1999). Como expone Carrillo (2007), argumentar nos lleva a crear una realidad a través del lenguaje con un proceso llamado discurso y un producto llamado texto. Aprender sobre argumentación le interesa tanto al alumnado como al maestro de matemáticas, ya que el desarrollo de estas capacidades argumentativas es didácticamente más complejo, interesante y extenso de lo que es una demostración. El razonamiento en matemáticas no siempre se basa en la lógica formal y es por lo que no siempre se limita a la prueba (Lithner, 2008). Hay diversos autores que sugieren que se promueva la argumentación como un aspecto fundamental para el aprendizaje de las ciencias (Pinochet, 2015). Como expone Voss y Means (1991, citado en Retuer, 2023) una herramienta necesaria para el razonamiento es la argumentación, entendiendo que “el razonamiento es un proceso que permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas” (Castro et al., 2010, p.1). Con ello, nos da un indicio de cómo influye nuestra manera de razonar en nuestra argumentación.

Por ello, en el presente trabajo, se pretende ver cómo se relacionan los modos de argumentar de unos EPM en una actividad de clasificación y discriminación con sus formas de razonamiento, según las diferentes formas de aprehensión de Duval (1998). Además, se contabiliza y analiza el contenido matemático que se recoge en las respuestas de esta actividad y se relaciona con las diferentes formas de razonamiento.

MARCO TEÓRICO

Conocimiento del contenido

Shulman (1986, 2005) puso en valor el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas para conocer la materia en diferentes áreas interrelacionadas. Entre esos puntos se encontraba el conocimiento de la materia, que en nuestro caso es conocimiento matemático, el cual se define en Hill, Ball y Schilling (2008) como aquel conocimiento matemático que usa un el profesor para crear y producir crecimiento en el alumnado. Por otra parte, Aguilar y colaboradores (2013) lo definen como el conocimiento que tiene el profesor acerca de los contenidos matemáticos escolares. Shulman (1986), dio valor al conocimiento sintáctico de las matemáticas y a la estructura sintáctica con la que se muestra una variedad de conceptos y principios básicos de esta disciplina.

A partir del trabajo de Shulman (1986) y en relación con el conocimiento de la materia o contenido matemático, se han elaborado diferentes investigaciones relacionadas con el conocimiento didáctico del contenido (Aguilar et al., 2013). A partir de esta teoría, se desarrollaron varios modelos que se apoyan y amplían esta visión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Estos comparten un punto importante que es el conocimiento del contenido matemático (Aguilar et al., 2013). Entre ellos, encontramos modelos como MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015) o el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007; Godino, 2009), estos modelos creen en la importancia que tienen el conocimiento del contenido matemático por parte del maestro.

En este trabajo definimos los temas como los contenidos que provienen de los bloques de conocimiento que tradicionalmente se han trabajado en las aulas de matemáticas. Como referente a estas áreas, escogemos aquellas propuestas por NCTM (2000), National Council of Teachers of Mathematics que establece áreas matemáticas como son: los números y sus operaciones, la geometría, el análisis de datos, el álgebra y la probabilidad. En este caso nos centraremos en el área de geometría y los números y sus operaciones.

En esta investigación nos centraremos en conocer el conocimiento común del contenido al que se refieren los EPM en la actividad propuesta. Con ello veremos qué contenido usan como recurso principal para desenvolverse ante la actividad propuesta. Siguiendo la definición de Escudero-Ávila y Carrillo (2020), entendemos que el conocimiento es una gran red de habilidades, conceptos e imágenes que tenemos los humanos y son usadas para poder resolver problemas o desarrollar cualquier tarea y que esto, no implica que el

conocimiento haya de ser correcto. En este caso, saber si es correcto o incorrecto es irrelevante, ya que la intención es saber cómo y qué conoce el EPM.

Niveles de argumentación

A partir del trabajo (1958) de Stephen Toulmin, sobre la argumentación (*The Uses of Argumentation*), se han llevado a cabo múltiples investigaciones que han fundamentado el *argumento*, sus niveles y su estudio (Pinochet, 2015; Erduran, Simon y Osborne, 2004; Bell y Linn, 2000).

Se entiende como práctica argumentativa al conjunto de acciones y razonamientos que una persona usa para tratar de explicar o justificar un resultado o también para poder dar validez a una conjetura que emerge del proceso de resolver un problema (Homero, 2007). En este caso, nos acogemos a la definición que Pinochet (2015) nos aporta acerca del argumento y la argumentación. El argumento se refiere a aquellos discursos que el estudiante produce cuando da explicaciones, justifica o concluye. Por otro lado, la argumentación hace referencia al proceso que conlleva la elaboración de ese discurso.

Para Toulmin una argumentación es una afirmación que se presenta públicamente para ser aprobada (Erduran, Simon y Osborne, 2004). Dentro de esa afirmación, se encuentran *motivos* que son aquellos hechos específicos en los que nos basamos para respaldar aquello que afirmamos. Ese respaldo son aquellas generalizaciones que hacemos explícitas a partir de nuestra experiencia y en las que confiamos para darle credibilidad a esa argumentación. Las refutaciones son aquellas excepciones que pueden minar nuestros argumentos o la fuerza que tienen los mismos.

El modelo que nos aporta Toulmin nos permite analizar lo que él denomina argumentos sustantivos, que son aquellos que deben ser revisados según su contenido, lo cual crea una diferencia con aquellos otros modelos que se interesan únicamente por la estructura del argumento (Pinochet, 2015). Con ello se ha procedido a hilar la estructura argumentativa con el contenido matemático.

A partir de esta definición y de entender el proceso que conlleva la argumentación y su argumento, se muestran los niveles que estos tres autores, nos proponen como herramienta para poder identificar a qué nivel de argumentación pertenece cada argumento que expone la muestra.

Figura 1

Niveles de argumentación

TABLE 1
Analytical Framework Used for Assessing the Quality of Argumentation

Level 1	Level 1 argumentation consists of arguments that are a simple claim versus a counter-claim or a claim versus a claim.
Level 2	Level 2 argumentation has arguments consisting of a claim versus a claim with either data, warrants, or backings but do not contain any rebuttals.
Level 3	Level 3 argumentation has arguments with a series of claims or counter-claims with either data, warrants, or backings with the occasional weak rebuttal.
Level 4	Level 4 argumentation shows arguments with a claim with a clearly identifiable rebuttal. Such an argument may have several claims and counter-claims.
Level 5	Level 5 argumentation displays an extended argument with more than one rebuttal.

Nota: En esta tabla se muestran los diferentes niveles de argumentación que proponen Erduran et al. (2004) a partir del modelo de Toulmin. A la derecha de cada nivel se exponen los elementos que compone cada nivel de argumentación.

La argumentación como forma de razonamiento

“La argumentación no es una demostración” como afirma Duval (2000, p.150). Para que un razonamiento esté considerado como una demostración tiene que cumplir otros estándares como ser un razonamiento validado, pero la argumentación no siempre necesita estar vinculada a una validez, sino a una pertinencia. Este razonamiento válido, va ligado a un razonamiento deductivo. En cuanto al razonamiento, lo podemos definir como un medio útil y potente para la construcción del conocimiento en dos ámbitos, tanto el científico como el social. El razonamiento nos permite sacar conclusiones desde unas premisas establecidas previamente (Castro et al., 2010). Con él, podemos crear afirmaciones y llegar a conclusiones durante las actividades o tareas pertinentes. Se puede ver relacionada con la demostración, tal como expone Crespo (2005), donde el hecho de demostrar aparece de diversas formas en el aula de matemáticas y en los diferentes niveles educativos. En este caso, equiparar la argumentación al mismo nivel que la demostración matemática es excesivo.

Siguiendo el modelo de Duval (1998, citado en Torregrosa y Quesada, 2007), nos encontramos con la influencia de la visualización en el proceso de razonamiento. Esta visualización está definida como aquel acto por el cual una persona establece una conexión entre sus construcciones internas y algo que adquiere a través de los sentidos.

Dentro de la visualización, encontramos los niveles de Aprehensión. Duval dividió los niveles de Aprehensión en tres diferentes:

- Aprehensión perceptiva: Está caracterizada por ser la simple identificación de una configuración. Es la primera que se usa en la etapa educativa y la primera que aparece con el desarrollo cognitivo.
- Aprehensión discursiva: Se caracteriza por asociar afirmaciones matemáticas (definiciones, axiomas, teoremas) a una configuración determinada. Se puede realizar de dos maneras: del anclaje visual al anclaje discursivo, y a la inversa. Por las características de esta actividad solo nos topamos con la primera opción. A partir de un dibujo, el alumno genera asociaciones con sentido que caracterizan esa configuración.
- Aprehensión operativa: Se ve manifestada cuando el alumnado modifica una configuración inicial para resolver el problema.

A partir de aquí, Duval (1998, citado en Berciano, 2020) describe tres tipos de procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de la geometría. Por un lado, encontramos los procesos de visualización (mencionados anteriormente) que se refieren a cómo miramos una representación espacial. Por otro lado, los procesos de construcción con herramientas, que sirven para crear un modelo y cómo nuestra acción se relaciona con el objeto matemático. Por último, los procesos de razonamiento que se relacionan con el proceso discursivo de la creación del conocimiento. Estos tres procesos están interconectados y se van desarrollando de forma paralela dentro de la competencia geométrica.

MARCO METODOLÓGICO

Entendemos que un paradigma es aquel esquema teórico que nos da un modo de comprender el mundo. Con él identificamos áreas problemáticas que posteriormente podremos analizar e interpretar. Por ello, es necesario que exista una relación coherente entre el paradigma y el problema de estudio (Muñoz-Catalán, 2010). A partir de esta definición, nos posicionamos dentro de un paradigma interpretativo, con el que se pretende comprender, describir e interpretar una realidad, entendida como una realidad social (Bassegy, 2003). Este paradigma, está influenciado por la visión de cada persona e impide el establecimiento de una regla general.

Dentro de este paradigma interpretativo, se hará un corte cualitativo, asignando a cada respuesta que el EPM ha aportado una forma de aprehensión y un nivel de argumentación.

Tras ello, se hará uso de la cuantificación de las respuestas haciendo una clasificación en una tabla que evidencie los resultados. Por último, se llevará a cabo el método de Grounded Theory, o Teoría Fundamentada, donde la teoría emerge desde los datos (Glaser y Strauss, 1967, citado en Alarcón, et al., 2016) en el análisis del contenido, donde a partir de datos comunes se extraerán las categorías pertinentes.

En este estudio han participado 58 estudiantes para maestro (EPM) de Educación de Infantil de la Universidad de Huelva, todos ellos pertenecientes a la asignatura de *Didáctica de la matemática en Educación Infantil* establecida en el segundo año de este grado.

Objetivos de investigación

En este trabajo se pretende alcanzar dos objetivos diferentes:

- Conocer el contenido al que recurre el EPM en una actividad de clasificación y discriminación y relacionarlo con la forma de razonamiento.
- Analizar la forma de razonamiento que muestran los EPM en dicha actividad en relación con los niveles de argumentación.

Actividad Which One Doesn't Belong e Instrumento de recogida de datos

La actividad realizada WODB (Which One Doesn't Belong) fue creada por Christopher Danielson con la finalidad de despertar en los niños la curiosidad por las matemáticas. Con esta actividad se pretende generar interés en los estudiantes y llevarlos hacia una reflexión. La esencia de este libro está basada en el diálogo matemático y en saber que hay más de una respuesta correcta (Danielson, 2016). "Which One Doesn't Belong? Teacher's Guide" (2016), está dedicado a ser una guía para aquellos profesores que quieran trabajar la clasificación de figuras geométricas en su aula. Este libro se basa en los niveles de Van Hiele (1985) para trabajar el desarrollo del pensamiento geométrico del niño y el uso adecuado de la tarea según su nivel.

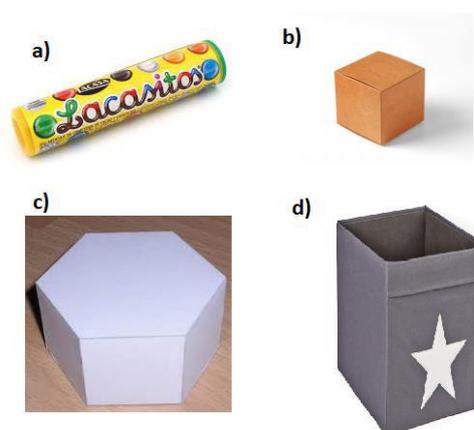
En este libro, Danielson (2016) relata la forma de proceder ante esta actividad. En concreto, al alumno se le muestran cuatro imágenes relacionadas entre sí pero cada una tiene al menos un atributo que la diferencia de las demás. A partir de esa imagen se le da la siguiente consigna al alumnado: Encuentra una razón por la cual cada uno no pertenece. En el libro, Danielson, expone que sólo pide que el alumnado encuentre una de las razones, aunque cada una de las cuatro imágenes muestren razones por las que no encajan

en el grupo. Con fines de esta investigación, se le pidió al alumnado que expresasen por qué creían ellos que no encajaban en el grupo cada una de esas imágenes. Consideramos que esta consigna fue comprendida por el alumnado ya que en su desarrollo escrito usaban frases introductorias como *se diferencia del resto porque... o no pertenece al grupo porque...*

En cuanto a la tarea, Gutiérrez y Jaime (2012) afirman la importancia de comparar ejemplos diferentes para así poder identificar las diferencias más significativas. Esto mostrará evidencia de algunas propiedades distintivas. Estos autores muestran de la misma forma 4 imágenes diferentes. Además, el hecho de discriminar ayuda a conocer las diferentes composiciones de las figuras y números (en este caso). Van señala en alguno de sus niveles la importancia de clasificar los objetos, reconociendo sus componentes y propiedades Hiele (Vargas y Gamboa, 2012).

Figura 2

Actividad 1 WODB de geometría



Nota: Tarea extraída de Ricart, Beltrán-Pellicer y Estrada (2019)

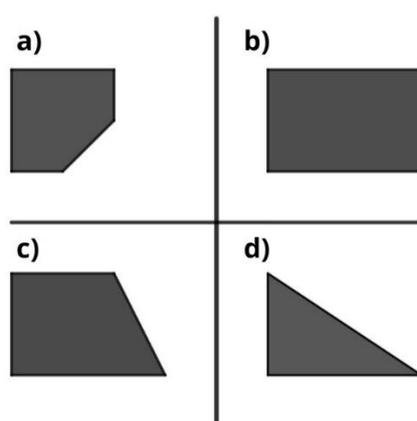
Al alumnado se le mostró cuatro conjuntos de imágenes, es decir, cuatro tareas:

- La primera y segunda tarea pertenecientes al área de geometría. La primera tarea (Figura 2), fue extraída de Ricart, Beltrán-Pellicer y Estrada (2019) donde fue usada para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de Educación Infantil. La segunda tarea (Figura 3) fue diseñada por este grupo de investigadoras, donde se ponían en juego la discriminación en figuras planas. En este caso, se buscó que fueran figuras que tuviesen elementos en común y a la vez elementos únicos con los que poder buscar razones por las que no

encajan. En la segunda tarea, se usaron figuras planas por diferentes motivos. El primero de ellos, la cercanía que evocaba al alumnado ya que estas figuras en dos dimensiones han sido comúnmente estudiadas durante la vida del alumnado. También se buscó que fueran cercanas a los cuadriláteros ya que son figuras comúnmente vistas. En cuanto a los elementos que comparten, buscamos que todas ellas compartieran un ángulo recto, por ejemplo.

Figura 3

Actividad 2 WODB de geometría



Nota: Tarea de geometría de diseño propio

- La tercera y cuarta tarea pertenecen al área de números y operaciones. La tercera tarea (Figura 4) fue extraída de la página web creada por Mary Bourassa, donde a partir de este método, se creó esta página web donde diferentes autores pueden exponer sus creaciones de la tarea WODB, en concreto esta fue creada por Pam Wilson. La cuarta tarea (Figura 5) fue diseñada por este grupo de investigadoras, donde se ponían en juego la discriminación de diferentes conjuntos de números, dando libre interpretación al alumnado. Usamos una barra vertical para separar cada número de su pareja. Se decidió diseñar esto así ya que daba la posibilidad de interpretar el conjunto de números de múltiples formas, no solo como un número natural, como ocurre en la Figura 4. A su vez, se buscó que compartieran elementos en común y elementos únicos que los diferenciaban. Como elemento común podemos encontrar que todas están compuestas por dos números, por ejemplo.

Figura 4

Actividad 3 WODB de números

a) 9	b) 16
c) 25	d) 43

Nota: Actividad realizada por Pam Wilson extraída de <https://wodb.ca/>

Figura 5

Actividad 4 WODB de números

a) 2 8	b) 4 4
c) 3 5	d) 4 5

Nota: Tarea de números de diseño propio

En cuanto a las consideraciones éticas para la recogida de datos, se expuso en el instrumento de recogida de datos que se entregó. De forma explícita, se expuso que para se usarían estas actividades y con que finalidad se realizaba esta actividad. Además, de forma verbal se les explicó y afirmó tanto la finalidad de la actividad como la explicación de esta. La entrega de esta actividad fue completamente voluntaria y anónima. También se comentó la libertad de escribir su nombre para posteriormente poder realizar un contacto extraordinario en el caso de que fuese relevante para la investigación, si esto no sucedía, la actividad era completamente anónima.

Instrumento de análisis de datos

A partir de la recogida de datos realizada en el apartado anterior, se transcribieron las respuestas del alumnado al sistema Excel, para así poder realizar el pertinente tratamiento de datos. Cada alumno, se codificó con la letra “A”, “B” o “C”, dependiendo del grupo al que pertenecían y además se les asignó un número natural marcado por el orden de entrega. Tras ello, se codificaron las respuestas a través de siglas que identificaban cada una de las subcategorías que se muestran en las tablas siguientes. Se han creado dos instrumentos de análisis, uno para los niveles argumentativos y otro para las formas de razonamiento.

Tabla 1

Sistema de categorías según las formas de razonamiento de Duval (1998)

Categoría	Categorías	Indicador
Formas de Razonamiento	Aprehensión perceptiva (P)	Correspondiente a aquella respuesta que solo alude a cuestiones perceptibles a simple vista, refiriéndose a elementos sencillamente perceptibles y aislados. En este nivel se ha considerado palabras como “lados” o “vértices” dependiendo de la respuesta como parte de esa aprehensión perceptiva, ya que debido a la edad madurativa del alumno y su bagaje por la educación se considera vocabulario común.
	Aprehensión discursiva (D)	Correspondiente a aquella respuesta que conlleva el uso, exposición o la reflexión de una definición o teorema. En ella se realiza un discurso más complejo, haciendo uso de conocimientos previos.
	Aprehensión operativa (O)	Correspondiente a aquella respuesta que para su resolución ha realizado una transformación en el propio “objeto” para la resolución de la actividad.

Nota: Entre paréntesis se muestra la sigla que se ha utilizado para la codificación de las respuestas.

En cuanto al tratamiento del razonamiento que encontramos en esta actividad, se seguirá la teoría de Duval (1998) expuesta anteriormente, teniendo en cuenta los niveles de aprehensión que muestra el alumnado. A partir de ello se creó el instrumento de análisis de la Tabla 1.

Por otro lado, se ha tratado en este instrumento el nivel de argumentación que muestran en esta actividad. Para ello, nos hemos basado en los Niveles de Argumentación de Toulmin, extraídos de (Erduran, Simon y Osborne, 2004). Aunque estos niveles se marcan del Nivel 1 (siendo este el menor), al Nivel 5 (siendo este el mayor), somos conscientes que por las características de la actividad no se podría llegar a obtener un Nivel 5. Por ello, consideramos el Nivel 4 como aquel nivel que muestra una argumentación de máximo nivel y el Nivel 1 como la ausencia de argumentación. A partir de ello se creó el instrumento de análisis de la Tabla 2.

Tabla 2

Asignación de los Niveles de Argumentación

Categoría	Subcategoría	Indicador
Niveles de argumentación	Nivel 1 (N1)	Se considera este nivel como la ausencia de argumentación. Se les ha asignado a aquellas respuestas en blanco o con respuestas como “no encuentro la diferencia”.
	Nivel 2 (N2)	Correspondiente a aquellas respuestas en las que solo se habla del “objeto” en concreto sin hacer alusión al resto de “objetos” y sin realizar ninguna refutación.
	Nivel 3 (N3)	Correspondiente a aquellas respuestas en las que se realiza un argumento normalmente extenso en el que se refiere al “objeto” en cuestión comparándolo de forma explícita con el resto de los “objetos”. Además, realiza posibles refutaciones de ese mismo argumento
	Nivel 4 (N4)	Se considera este nivel como la expresión de un argumento completo, que hace alusión a el objeto en cuestión y el resto

Nota: Entre paréntesis se muestra la sigla que se ha utilizado para la codificación de las respuestas.

Junto con estos instrumentos se asignó a cada una de las respuestas de la muestra una codificación según el nivel de argumentación y el tipo de razonamiento que presentaba. Esta se asignó a cada respuesta de los diferentes apartados (a, b, c y d) y de las distintas tareas.

Previo a mostrar estas tablas de resultados, se exponen dos ejemplos (una de las tareas geométricas y otro de las tareas de números) de cómo se ha realizado la asignación de estas subcategorías.

Un sujeto realiza la siguiente respuesta en el apartado “A” de la primera actividad:

El a no pertenece al grupo porque se trata de un cilindro. Una de las caras de este cilindro es un círculo, mientras que las demás figuras están conformadas por figuras cuadradas o de más lados.

Debido a que se refiere al objeto en cuestión y lo compara con el resto de las figuras como un conjunto (bajo su percepción) se le asigna un Nivel 3 de Argumentación. Por otro lado, según el razonamiento de Duval, se le ha asignado la Aprehensión Discursiva ya que hace uso del conocimiento del “Cilindro” para realizar su razonamiento.

Un sujeto realiza la siguiente respuesta en el apartado “A” de la cuarta tarea:

No pertenece al grupo porque la suma de ambos números da como resultado un número de 2 cifras.

Debido a que se refiere solo al número o apartado en cuestión y no expone de forma explícita los argumentos por los que el “resto” o el “grupo” no encajan con esta afirmación se le ha asignado un Nivel 2 de Argumentación. Por otra parte, siguiendo la forma de razonamiento de Duval, se le ha asignado una Aprehensión Operativa ya que realiza una transformación u operación a la hora de tratar al número o números en este caso.

Como instrumento para analizar el contenido se siguió la metodología de Grounded Theory. Para ello se utilizó un programa que contabiliza las palabras de un texto seleccionado. En este caso, se usó la transcripción digital de la prueba realizada. Una vez hecho, se eliminaron de estos resultados aquellas palabras que no tuvieran relación directa con el contenido matemático (como conectores, preposiciones, palabras sin sentido matemático, etc.) y por consecuente se dejaron solo las que sí tenían relación (como números, figuras geométricas, etc.). Con todo ello se crearon categorías en base a las relaciones más comunes que había entre las palabras. En este caso fueron:

- Partes de una figura geométrica: En esta categoría se incluyeron aquellas palabras que tenían relación con aquellas partes que conforman una figura a geométrica tanto de figuras planas como de tres dimensiones. Además, se incluyeron los tipos de ángulos. Solo se incluyen aquellas partes que conforman una figura ya que

estas palabras evidencian una forma de razonamiento diferente (aprehensión perceptiva) a sí hacen uso de la definición de una figura (aprehensión discursiva). En esta categoría encontramos palabras como: caras, lados, bordes, etc.

- Números: En esta categoría se incluyó todo aquello que tenía relación con los números. Se han incluido palabras que tienen que ver con la propiedad del número o sus características, como puede ser par o impar. También se ha incluido palabras que tratan las operaciones numéricas como puede ser multiplicar o restar
- Figuras geométricas: En este apartado se incluyó todo aquello que tiene que ver con una figura geométrica, de igual modo siendo indiferente su dimensión. En esta categoría se han dejado solo los nombres de las figuras geométricas ya que ello implica conocer la definición que existe detrás del nombre de esa figura geométrica. Por ejemplo, si tu respuesta es que es un cuadrado, implica conocer las características que tiene el cuadrado, como puede ser tener los 4 lados iguales o 4 ángulos rectos.
- Adjetivos: En este apartado se incluyeron todas aquellas palabras que le aportaban una característica al objeto o número. Todas aquellas palabras que el EPM había usado para caracterizar su respuesta. Encontramos adjetivos calificativos como son grande, pequeño, cerrado, abierto o alguna referencia a su utilidad como puede ser caja.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha decidido realizar de forma simultánea tanto la muestra como la reflexión de los resultados ya que se ha considerado que para el lector es más fácil el entendimiento de los resultados si a la vez se va reflexionando sobre ellos. Por ello, a partir de nuestros objetivos de investigación y los resultados obtenidos en la prueba realizada, se va a proceder a la discusión y exposición de estos. Para realizar esta tarea, se muestran los resultados sintetizados en la Figura 6 y Figura 7. Ellas nos ayudan a observar los resultados de forma más clara, y una última figura (Figura 8) que lo relaciona con el contenido matemático. En ella, se han cuantificado el número de respuestas que se ha obtenido de cada subcategoría anteriormente expuesta.

Con los ejemplos que se expusieron tras los instrumentos de análisis de datos, se procede a cuantificar las respuestas que hemos obtenido de cada tipo, dejando este resumen evidenciado en diferentes tablas.

Figura 6

Recuento de respuestas agrupado por Nivel de Argumentación

SUMA DE RESPUESTAS	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	
RECuento DE RESPUESTAS	TAREA 1				TAREA 2				TAREA 3				TAREA 4			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
NIVEL 1 DUVAL PERCEPTIVO	3	10	14	11	7	3	13	2	0	7	17	15	10	10	15	14
NIVEL 1 DUVAL DISCURSIVO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 1 DUVAL OPERATIVO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 1 PERCEPT/DISCURSIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 1 PERCEP/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 1 DISCURSIV/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 2 - DUVAL PERCEPTIVO	5	7	21	20	30	14	13	16	18	6	7	14	2	26	2	12
NIVEL 2 - DUVAL DISCURSIVO	23	28	13	16	15	36	26	37	6	20	2	7	3	5	30	15
NIVEL 2 - DUVAL OPERATIVO	0	0	0	0	1	0	2	0	20	15	28	17	33	11	7	9
NIVEL 2 PERCEPT/DISCURSIV	2	3	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
NIVEL 2 PERCEP/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	1
NIVEL 2 DISCURSIV/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	0	1	2
NIVEL 3 - DUVAL PERCEPTIVO	0	0	1	1	2	0	1	0	2	0	0	1	0	3	1	0
NIVEL 3 - DUVAL DISCURSIVO	22	9	9	5	3	5	3	2	0	10	0	2	3	0	0	3
NIVEL 3 - DUVAL OPERATIVO	0	0	0	0	0	0	0	1	12	0	2	1	1	1	2	2
NIVEL 3 PERCEPT/DISCURSIV	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 3 PERCEP/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 3 DISCURSIV/OPERATIV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 4 - DUVAL PERCEPTIVO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 4 - DUVAL DISCURSIVO	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NIVEL 4 - DUVAL OPERATIVO	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Leyenda:

- De 1 a 12 respuestas
- De 13 a 24 respuestas
- De 25 a 37 respuestas

A partir de esta tabla que se muestra en la Figura 6, podemos ver cómo se relacionan las diferentes tareas y sus apartados con las formas de razonamiento según cada nivel de argumentación. A su vez, se ha utilizado una leyenda de colores para poder resaltar con mas facilidad donde se encuentran asignadas la mayoría de las respuestas.

A partir de esta tabla que se muestra en la Figura 7, podemos ver cómo se relacionan las diferentes tareas con los niveles de argumentación, según las diferentes formas de razonamiento. A su vez, al igual que en la tabla anterior, se ha incorporado una leyenda que nos permite identificar con mayor facilidad donde se encuentran la mayoría de las respuestas.

A partir de la Figura 6, podemos observar que la mayoría de las respuestas se encuentran agrupadas en torno al Nivel 2 de argumentación, observando una clara pronunciación en la Tarea 2 de nuestra prueba. A su vez, podemos observar cómo encontramos bastantes respuestas asignadas alrededor del Nivel 3 de argumentación, encontrándose un rango de asignación de entre 1 a 12 respuestas. Destacamos en este Nivel 3, la Tarea 1 – A. En ella

encontramos 22 respuestas asignadas dentro de este Nivel 3. Tras la revisión de las respuestas se considera que esta diferencia ha sido así debido a diversos motivos.

Físicamente era fácilmente diferenciable del resto de apartados ya que, al ser un cilindro una figura con superficie curva y el resto cuerpos con caras rectas, estos tenían elementos comunes fácilmente diferenciables como los vértices. Ha sido con notoriedad el apartado que con mayor facilidad han respondido. Partiendo desde la base de recto o curvo, ha sido una forma de clasificar a grandes rasgos. A partir de lo anteriormente expuesto, se ha observado que para explicar la diferencia se ha recurrido a argumentar refiriéndose al propio cilindro y comparándolo de forma explícita con el resto de las figuras (como un único grupo), por ello se ha asignado al Nivel 3 de argumentación. Además, son figuras familiares estudiadas desde la Educación Infantil por lo que esa familiaridad le infunde confianza a la hora de argumentar sobre esa tarea.

Es reseñable destacar que en el Nivel 4 de argumentación solo ha habido dos respuestas y estas pertenecen al primer apartado de la primera tarea (Tarea 1 – A) que, como hemos visto antes, pertenece al cilindro. Solo dos personas han alcanzado este cuarto nivel de argumentación durante esta actividad y ambas han llegado realizando sobre la misma tarea una forma de razonamiento distinta, una de forma discursiva y otra de forma operativa.

A partir de la Figura 7 realizamos un análisis desde la perspectiva del razonamiento. Podemos observar que a lo largo de todas las actividades la mayoría de las respuestas se asignan a la aprehensión perceptiva y discursiva. Tenemos en cuenta que las respuestas asignadas a la columna nombrada como N1P, también llamada Nivel 1 Perceptivo, son aquellas respuestas en blanco o respondidas con frases como *no encuentra la diferencia* o *no responde*. Se considera así, ya que la ausencia de argumentación se ha considerado como el Nivel 1 de argumentación, además junto con una forma de razonamiento perceptiva, el sujeto no ha encontrado ninguna diferencia física del resto de objetos.

A su vez, se ha considerado que están en el Nivel 1 de argumentación ya que en estos casos la argumentación no se ha producido. Continuando en esta columna, observamos que las tareas que mayor dificultad han generado a la hora de argumentar han sido las tareas de números (tarea 3 y tarea 4), especialmente los apartados C y D de ambas tareas. Consideramos que esto es así debido a que implicaban cambios de razonamiento operativo principalmente para poder encontrar su diferencia.

Figura 7

Recuento de respuestas agrupado por tipo de tarea y forma de razonamiento

TAREA	APART	N1P	N2P	N3P	N4P	N1D	N2D	N3D	N4D	N1O	N2O	N3O	N4O	N1P/D	N2P/D	N3P/D	N4P/D	N1P/O	N2P/O	N3P/O	N4P/O	N1D/O	N2D/O	N3D/O	N4D/O	DE RESP
TAREA 1	A	3	5	0	0	0	23	22	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	B	10	7	0	0	0	28	9	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	C	15	21	1	0	0	12	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	D	11	20	1	0	0	16	5	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
TAREA 2	A	7	30	2	0	0	15	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	B	3	14	0	0	0	36	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	C	13	13	1	0	0	26	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	D	2	16	0	0	0	37	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
TAREA 3	A	0	18	2	0	0	6	0	0	0	20	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	B	7	6	0	0	0	20	10	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	58
	C	16	7	0	1	0	2	0	0	0	28	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	58
	D	15	14	1	0	0	7	2	0	0	17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	58
TAREA 4	A	10	2	0	0	0	3	3	0	0	33	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	3	0	58
	B	10	26	3	0	0	5	0	0	0	11	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	58
	C	15	2	1	0	0	30	0	0	0	7	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	58
	D	14	12	0	0	0	15	3	0	0	9	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	58

Leyenda:

	De 1 a 12 respuestas	(N) – Nivel
	De 13 a 24 respuestas	(P) – Perceptivo
	De 25 a 37 respuestas	(O) – Operativo
		(D) - Discursivo

Junto con este razonamiento operativo, encontramos que la mayoría de las respuestas que implican una comprensión operativa se encuentran en las tareas de números (tarea 3 y 4). Hemos podido observar que, para encontrar su diferencia o singularidad por la que no encajan en el resto o grupo, se han hecho transformación del número o de los números (tales como descomponer, elevar, multiplicar, sumar, dividir, etc.), por ello han sido asignados al nivel operativo.

De forma general, encontramos que la mayoría de las respuestas han sido asignadas en el Nivel 2 de argumentación como hemos mencionado antes, pero tanto desde una comprensión perceptiva (con 213 respuestas) como una comprensión discursiva (con 281 respuestas). En este caso, se destaca la Tarea 2 – D con 37 respuestas asignadas al Nivel 2 Discursivo, debido a que en este apartado encontramos la figura de un triángulo rectángulo, la cual, es una figura prototípica y altamente reconocida por el alumnado durante su vida estudiantil. Se considera que el estudio continuo de esta figura le ha dado acceso a un conocimiento mayor acerca de la misma.

Al igual que el razonamiento operativo se encontraba confinado en las actividades de números, vemos una alta predominancia del razonamiento discursivo en las actividades geométricas. Si hablamos del razonamiento perceptivo encontramos su reparto de forma más homogénea entre las actividades tanto de números como de geometría. En este artículo podemos ver que el razonamiento perceptivo se asocia principalmente al nivel 1

y 2 de argumentación y que el razonamiento discursivo se asocia principalmente al nivel 2 y 3 de argumentación. En cuanto al razonamiento operativo, siendo este el menos común, vemos que se asocia principalmente al nivel 2 de argumentación

Se han encontrado sujetos que han hecho uso de dos formas de razonamiento a la vez, principalmente combinando el razonamiento perceptivo y el discursivo, seguido de la combinación del razonamiento discursivo y el operativo. Aunque no son excesivas respuestas las que combinaban 2 formas de razonamiento, sí es reseñable destacar que ciertas personas no se limitaban a una forma de razonar a la hora de justificar o argumentar sus respuestas.

Figura 8

Tabla de contenido de la prueba

Partes de la figura geométrica		Números o relacionado		Figuras geométricas o relacionado al conjunto		Adejtivos calificativos	
Palabra	Repetición	Palabra	Repetición	Palabra	Repetición	Palabra	Repetición
Lado/s	244	2,4,3,8,7,6,1,25,9,16,5,0,15	567	Nombre de figuras geométricas	226	Grande/Pequeño/Tamaño/Alto	19
Iguales	106	Número/s/Cifra/as	339	Figura/s	80	Plana/s	11
Ángulo/s	84	Par/es/Impar/es	150	Forma	44	Desigual/es/Atípica/Cualidad	11
Cara/s	68	"Sumar"/"Dividir"/"Restar"/"Multiplicar"	84	Paralelogramo	14	Contiene/Interior/Almacenar/Dentro/Guardar	10
Recto/s	47	Múltiplo/s/Divisible	62	Cuadrilátero/s	12	Redondo/s/Curva/s	9
Vértices	30	Unidad/es/Decena/s/Centena/s	36	Polígono/s	11	Alargado/a/Largo/s/Longitud	9
Base/s	30	Mayor/Menor	31	Poliedro	8	Rueda/Gira	7
Noventa grados	18	Menos	19	Hexagonal/es	5	Lateral/es	7
Arista/s	13	Numerador/Denominador	19	Rectangulares	4	Volumen/Dimensiones	6
Paralelos/Perpendicular	13	Primo	15	Cilíndrica	4	Posterior/Anterior/Delante	6
Agudo/s	10	Fración/es	13	Triangular	3	Hueco/Profundo/Fondo/Compacto	6
Obtuso/s	5	Decimales	10	Escaleno/Isóceles	3	Cerrado/Abierto	6
Líneas/Bordes	4	Entero/s	4	Pentagonal	2	Arriba/Abajo/Inferior/Superior	6
Bordes	1	Mitad	2	Raya	1	Irregular/Regular	5
Área	1	Dígito	1	Circunferencia	1	Caja	2

Nota: Aquellos que se encuentran entre comillas es porque engloban diferentes conjugaciones de la palabra. La casilla de "Nombre de figuras geométricas" engloba las siguientes palabras: Rectángulo, cilindro, triángulo, cuadrado, hexágono, cubo, prisma, estrella, pirámide, círculo.

Siguiendo con el tratamiento del contenido de esta prueba, se adjunta una tabla que resume aquellas palabras más repetidas relacionadas con el contenido matemático. Algunas de estas palabras han sido agrupadas por sus características, por pertenecer al mismo grupo o por su similitud.

Como podemos observar en la Figura 8, encontramos que hay una gran cantidad de respuestas que hacen uso de la palabra que define a las propias figuras geométricas, dándonos cuenta de que la muestra es conocedora de aquellas palabras que definen a una figura prototípica. Al usar estas palabras, por ejemplo, *Cuadrado*, podemos darnos cuenta

de que este sujeto es conocedor de la definición que conlleva esa palabra ya que la relaciona directamente con la figura que está viendo. Por ello, se considera que el uso de estas definiciones de las figuras geométricas refleja el uso de un razonamiento discursivo.

Además, vemos que a la hora de tratar las figuras geométricas y encontrar su diferencia, podemos observar que hacen un uso común de aquellas características perceptivas de las figuras (como pueden ser lados, ángulos, vértices, etc.). En este trabajo se ha considerado que todas estas palabras dan indicios de un razonamiento perceptivo, ya que el alumnado las usa como herramienta de una descripción física del objeto. Podemos observar que es dentro del tratamiento de los ángulos, donde cierta muestra hace uso de un razonamiento discursivo usando términos como *agudos*, *obtusos* o *noventa grados*. En esta categoría también podemos relacionar otras palabras con el uso de un razonamiento discursivo como puede ser el *área* o *perpendicular/paralelo*. Estas palabras muestran que hay un conocimiento de un teorema o definición que les permite usarlo para diferenciarlo del resto.

En cuanto a los números, vemos que hay una gran variedad de palabras que hacen uso de modificaciones operacionales, tales como *sumar*, *restar* o *múltiplo*, *divisible*. Todas estas palabras, nos muestran que el alumno ha hecho uso del razonamiento operacional ya que, para encontrar la diferencia, ha hecho modificaciones en la propia figura para cambiar su forma de verla o de tratarla. En esta sección también encontramos el uso del razonamiento discursivo con palabras como *par*, *impar* o *numerador*, *denominador*. Estas hacen uso de una definición para su tratamiento, al contrario que las anteriores que realizan una modificación en la propia figura.

En cuanto a los adjetivos calificativos, encontramos que la mayoría hacen referencia a características físicas de las figuras, algunos se refieren a su utilidad y otros a su presentación. La mayoría de ellos nos harían referencia a un uso del razonamiento perceptivo ya que al igual que se ha mencionado anteriormente, informa de las características físicas del objeto. Aún así, podemos encontrar algunas que sí hacen referencia a un tipo discursivo, como puede ser palabras como *irregular* y *regular* o *volumen* y *dimensiones*.

CONCLUSIONES

Como se exponía al inicio de este artículo, se resalta la importancia de contenido y del uso que hacemos del mismo. A su vez, se ha tratado de relacionar las diferentes formas

de razonamiento de Duval (1998) de forma directa con los diferentes niveles de argumentación por parte de Pinochet (2015). Con ello también se ha pretendido ver si había una relación directa entre el contenido que usa el estudiante para maestro a la hora de argumentar con los niveles de argumentación y la forma de razonamiento. Con esto en cuenta, podemos resaltar las siguientes conclusiones generales.

En primer lugar, se concluye con que, aunque las diferentes formas de percibir el razonamiento de Duval se han usado principalmente para actividades geométricas (Berciano et al., 2017; García y Callejo, 2015), ya que las diferentes formas de razonamiento han sido creadas y orientadas hacia el tratamiento de la geometría. En este trabajo, se ha usado para tratar la geometría, pero también se ha usado para tratar las diferentes formas de percepción y razonamiento de los números. Aunque esto se ha realizado de forma experimental, no habiendo encontrado otra investigación que lo relacionase con los números, sí que se ha podido utilizar de una forma armónica y en sintonía con lo que se pretendía investigar que son las diferentes formas de razonamiento.

En segundo lugar, tras analizar los resultados de esta actividad, podemos dejar indicios de que existe una relación entre los diferentes niveles de argumentación (Erduran, Simon, y Osborne, 2004) y la forma de razonamiento (Torregrosa y Quesada, 2007). En este caso, se considera que se debería realizar en un futuro en una muestra mayor para seguir contrastando datos. Como hemos visto en los resultados, el razonamiento perceptivo se asocia principalmente al nivel 1 y 2 de argumentación, el razonamiento discursivo se asocia principalmente al nivel 2 y 3 de argumentación y el razonamiento operativo, siendo este el menos común, vemos que se asocia principalmente al nivel 2 de argumentación. Nos quedaría por ver, en otro tipo de actividad si se fomentaría otra relación entre las formas de razonamiento y los niveles de argumentación. Además, sería interesante seguir indagando en aquellas personas que hacen uso de diferentes formas de percibir la figura en su razonamiento con el nivel de argumentación que se le asigna. En este artículo solo hemos encontrado 27 respuestas de 928 respuestas que combinaran dos formas de razonamiento.

Por último, hay que destacar que el contenido va directamente relacionado a la forma de razonar y a la profundidad del argumento. Aquellos que se quedan en elementos que evocan a un razonamiento perceptivo, se quedaban en un nivel de argumentación inferior, mientras que aquellos que hacían uso de contenidos que evocasen un razonamiento discursivo u operativo, tendían a tener un nivel de argumentación mayor o una

argumentación más extensa o de mayor profundidad. Esto se ve evidenciado ya que, para el razonamiento discursivo y operativo, es necesario conocer palabras que por detrás conllevan una definición o conocimiento específico de la materia tratada. Esas palabras evidencian un conocimiento previo con mayor profundidad que las asignadas al razonamiento perceptivo. Esto convierte a la visualización en una herramienta necesaria en la resolución de problemas (Torregrosa, 2007).

Como futuras líneas de investigación, queda abierto investigar qué relación tienen esas respuestas con el ser correctas o incorrectas, y si ello tiene alguna repercusión en el nivel de argumentación, la forma de razonamiento o el contenido. A su vez, sería interesante probar las diferentes formas de aprehensión en otro tipo de actividad y que esa actividad propiciase alcanzar el nivel 4 y 5 de los niveles de argumentación. Además, refuerza la necesidad de trabajar en el aula procesos de enseñanza que fomenten la argumentación y el razonamiento tendiendo a usar principalmente la aprehensión discursiva y operativa, ya que son aquellas que fomentan la abstracción.

Finalmente, y volviendo a hacer hincapié en los resultados que se han obtenidos en esta investigación, se debe destacar la importancia que ha tenido el factor motivacional del EPM a la hora de realizar la actividad. Dentro de las respuestas del alumnado y reparando en la propia actitud durante la realización de la prueba, se ha observado que las respuestas han estado directamente influidas por la motivación del EPM, tanto para bien, como para mal. A su vez, el hecho de haber realizado la prueba escrita y de forma presencial, ha hecho que se obtengan mayores resultados que si se hubiese realizado a través de un cuestionario electrónico o de forma digital.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alarcón, A., Munera, L., y Montes, J. (2016). La teoría fundamentada en el marco de la Investigación educativa. *Saber, ciencia y libertad*, 12(1), 236-245. ISSN: 1794–7154.
- Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., y Valverde-Soto, G. (2019). Análisis conceptual de la demostración matemática y su relevancia en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Morales-López (Ed.), *Memorias del I Congreso Internacional de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional*, 52, 1–9. Doi: <http://dx.doi.org/10.15359/cicen.1.2> ISBN: 978-9968-9661-6-0.
- Alsina, Á. (2012). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Octaedro.
- Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

- Bell, P. y Linn, M. C. (2000). Scientific arguments as learning artifacts: designing for learning from the web with KIE. *International Journal of Science Education, Abingdon*, 22(8), 797–817.
- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, M. (2020). Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 36(72), 332–357.
- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. *Investigación en Educación Matemática XXI*, 147–156.
- Brugos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencias de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad (Traducido por: Angela Helen Barnie). *Educação e Pesquisa*, 44.
- Carrillo, L. (2007). Argumentación y Argumento. *Sigma 16*, 289–320.
- Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55–67.
- Cornejo-Morales, C. E., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2021). La situación argumentativa: un modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil. *PNA 15*(3), 159–185.
- Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, 24, 23–29.
- Danielson, C. (2016). *Which One Doesn't Belong? Teacher's Guide*. Stenhouse Publishers.
- Erduran, S., Simon, S., y Osborne, J. (2004). TAPping into argumentation: developments in the application of Toulmin's argument pattern for studying science discourse. *Science Education, Hoboken*, 88(6), 915–933.
- Escudero, I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universidad de Huelva.
- Escudero-Ávila, D. I., y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación matemática*, 32(2), 8–38.
- García, Á., Callejo, M. L., y Fernández-Verdú, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 279–288.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 20, 13–31.
- Hanna, G., y De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 1–10). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-2129-6_1
- Homero, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63–98.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*, 67, 255–276.
- Martínez, B. A., y Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. UNIR.
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., y Climent, N. (2015). *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 1801–1817.
- Perelman, C. y Olbrech-Tyteca, L. (1994). *Tratado de la argumentación*. Gredos.
- Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciênc. Educ., Bauru*, 21(2), 207–327.
- Reuter, F. (2023). Explorative mathematical argumentation: a theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 112, 415–435.
- Ricart, M., Beltrán-Pellicer, P., y Estrada, A. (2019). Actividad scaffolding en geometría para desarrollar habilidades de argumentación y clasificación en futuros maestros de Educación Infantil. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 503–512.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos*. Universidad de Granada.
- Sardà, A. (2003). Argumentar: proposar i validar models, en N. Sanmartí (coord.), *Aprende Ciències tot aprenent a escriure ciència*, 62, 121–148.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275–300.
- Vargas, G., y Gamboa, R. (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA*, 27(1), 74–94.