



TÍTULO

**CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICOS PEDAGÓGICOS DE CONTENIDO
MATEMÁTICO**

AUTOR

Gustavo Adolfo Gamboa Sevilla

	Esta edición electrónica ha sido realizada en 2022
Tutora	Dra. Dña. Nuria Climent
Instituciones	Universidad Internacional de Andalucía ; Universidad de Huelva
Curso	<i>Máster Oficial en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (2020/21)</i>
©	Gustavo Adolfo Gamboa Sevilla
©	De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía
Fecha documento	2021



**Atribución-NoComercial-SinDerivadas
4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0)**

Para más información:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en>

Conocimientos tecnológicos pedagógicos de contenido matemático

Gustavo Adolfo Gamboa Sevilla

Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte,

Universidad de Huelva

Trabajo Final de Máster

Dra Nuria Climent

Diciembre 2021

Resumen

Estudio teórico empírico de los conocimientos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de un profesor experto. Para abordar el estudio se tomó como perspectiva principal el modelo MTSK, y se planteó como problemática la integración de la dimensión tecnológica al modelo considerando el modelo TPACK, ya que ambos modelos tienen su génesis en el PCK de Shulman. Los conocimientos tecnológicos pedagógicos de contenido que manifiesta un profesor experto de matemáticas son conocimientos tecnológicos de contenido para la enseñanza y aprendizaje. A partir de los resultados de esta investigación, se plantea la posibilidad de crear una categoría referida a recursos de aprendizaje en el subdominio KFLM del MTSK, que permita comprender y profundizar los conocimientos tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas de un profesor.

Palabras clave: conocimiento tecnológico, conocimiento pedagógico de contenido, conocimiento tecnológico pedagógico de contenido, MTSK, conocimiento de la enseñanza de la matemática (máximo 5 palabras clave)

Abstract

Theoretical empirical study of the technological knowledge for the teaching and learning of mathematics from an expert teacher. To address the study, the MTSK model was taken as the main perspective, and the integration of the technological dimension to the model was considered as the main problem, considering the TPACK model, since both models have their genesis in Shulman's PCK. The pedagogical content technology knowledge displayed by an expert math teacher is content technology knowledge for teaching and learning. Based on the results of this research, the possibility of to create a category related to learning resources in the KFLM subdomain of the MTSK, which allows a teacher to understand and deepen the technological knowledge for learning mathematics.

Keywords: technological knowledge, pedagogical content knowledge, pedagogical technological content knowledge, MTSK, knowledge of mathematics teaching

Introducción

La pandemia que vivimos actualmente por el COVID-19 afecta el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, poniendo en evidencia que los conocimientos tecnológicos son fundamentales e imprescindibles para continuar con este proceso.

La innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe centrarse en un aprendizaje mediado por TIC, utilizando metodologías centradas en el estudiante, como el aprendizaje basado en problemas, que permita al docente el desarrollo de proyectos contextualizados en donde se involucren conocimientos matemáticos (Saltos et al., 2020), ya que los alumnos “se desenvuelven en entornos virtuales generados por las TIC y gestionan su aprendizaje de manera autónoma” (Sánchez, 2020, p. 55).

En este estudio teórico empírico, las preguntas de investigación giran en torno a: (1) ¿existe un conocimiento tecnológico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un profesor experto? y (2) ¿cuáles son los conocimientos tecnológicos pedagógicos de contenido matemático que manifiesta un profesor experto en su práctica docente?

Para abordar el estudio, se toma como perspectiva principal, el modelo de análisis Mathematics Teacher's Specialised Knowledge MTSK (conocimiento especializado del profesor de matemáticas), y se plantea como problemática principal, la integración de la dimensión tecnológica al modelo.

Marco teórico

Si retomamos la inquietud de Shulman (1986; 1987) sobre un conocimiento especial del contenido que tienen los docentes, que transforman el contenido con el fin de ser enseñado, y lo contextualizamos a las características actuales de las Sociedades Tecnológicas que plantea Calderón et al (2014), podemos concebir un conocimiento especial del contenido que tienen los docentes, que transforman el contenido con el fin de ser enseñado con las TIC en entornos virtuales. Hablamos de un conocimiento tecnológico especializado, un conocimiento que no es

genérico, que alcanza su especialización movilizando conocimientos de contenido, es decir, un conocimiento tecnológico pedagógico de contenido.

TPACK

A partir de una revisión bibliográfica en revistas especializadas en las que la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) brinda enlaces, se determinó que, respecto al conocimiento tecnológico de un profesor, existe un modelo de saberes docente para incluir los conocimientos tecnológicos, que toma como base los Conocimientos Pedagógicos de Contenido (PCK) que planteó Shulman (1986; 1987). Este modelo logra integrar la tecnología y se conoce como TPACK (Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido). El Conocimiento Tecnológico y Pedagógico del Contenido consiste en una compleja interacción entre los conocimientos del contenido, los conocimientos pedagógicos y los conocimientos tecnológicos. Además, respecto a los profesores, plantea que, para integrar exitosamente el uso de la tecnología en la enseñanza, es necesario la construcción de un conocimiento flexible a través de la interacción de los conocimientos del contenido, los conocimientos pedagógicos y los conocimientos tecnológicos (Koehler et al., 2015).

Para Arévalo (2016) citando a Mishra y Koehler (2006), el marco conceptual TPACK lo forma la intersección de esos tres dominios de conocimiento básicos, que al conjugarse estos conocimientos se configuran otros dominios: (1) *el conocimiento pedagógico del contenido* (PCK): como la organización, representación y adaptación de temas, problemas o sucesos para la comprensión y aprendizaje; (2) *el conocimiento tecnológico del contenido* (TCK): como la comprensión de cuáles tecnologías son las más adecuadas para abordar y modificar los temas y sus representaciones, o viceversa, es decir, “los maestros necesitan saber no sólo los temas de la materia que ellos enseñan, sino también la manera en que el tema de la materia puede ser modificado por la aplicación de la tecnología” (p 1028); y (3) *el conocimiento tecnológico pedagógico* (TPK): como “el conocimiento de la existencia, los componentes y funciones de las diversas tecnologías que se utilizan en los entornos de enseñanza y aprendizaje, y de cómo la

enseñanza podría transformarse como resultado de la utilización de determinadas tecnologías” (p 1028). Por último, estos tres dominios de conocimiento tomados en conjunto constituyen el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK) (Figura 1). En este sentido, Cox y Graham, (2009, p. 64), definen el TPACK como el “conocimiento que tiene el profesor de cómo coordinar las actividades de las materias con las representaciones de sus tópicos específicos utilizando las tecnologías emergentes para facilitar el aprendizaje de los estudiantes”.

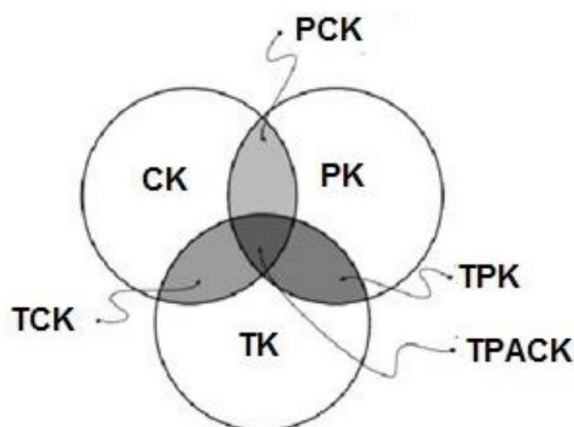


Figura 1. Representación del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK) (Mishra & Koehler, 2016, p 1025, citado por Arévalo 2016)

MTSK

En el marco de esta investigación, parece una oportunidad para considerar el PCK de Shulman desde el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) -interpretación que le han dado los profesionales que participan en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva-, y tratar de integrar los conocimientos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tomando como referencia el modelo TPACK.

“La posibilidad de refinar el análisis de la actuación de un profesor en el aula a partir de estas categorías y la consideración de la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas como algo global, más que propio de un subdominio, y desde una perspectiva intrínseca al profesor de matemáticas (Scheiner et al., 2019), nos lleva a mirar el conocimiento del profesor desde el MTSK.” (Climent et al., 2021)

Carrillo et al (2018) plantean el modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK), que considera la especialización en la enseñanza y aprendizaje de la matemática como una propiedad que es inherente al modelo, que parte del PCK de Shulman y el Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de Ball y sus colaboradores.

MTSK: Dominios y subdominios

Delgado y Zakaryan (2020, citando a Carrillo et al. 2017) plantean que el MTSK es un modelo analítico que, por un lado, permite la comprensión del conocimiento del profesorado de matemáticas, y por otro, una herramienta metodológica que permite analizar las prácticas docentes. No debe confundirse con un modelo de todo el conocimiento del profesor; por el contrario, únicamente de aquel conocimiento que está determinado por la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje. En la Figura 2 se presenta el modelo MTSK, que considera tres dominios: (1) *dominio del conocimiento matemático* (MK), (2) *dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático* (PCK) y (3) *dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje* (Carrillo y Martín, 2019).

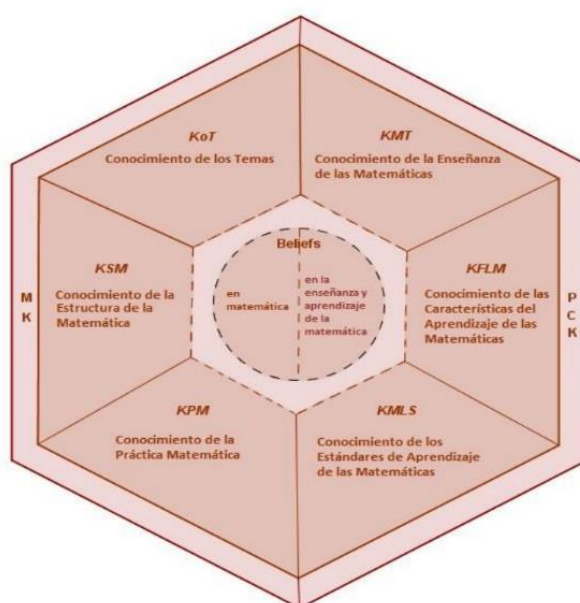


Figura 2. Modelo MTSK (Carrillo et al, 2018)

MTSK: Dominio del conocimiento matemático (MK) y subdominios

De acuerdo con la Figura 2, para Carrillo et al (2018) el **MK** se subdivide en tres subdominios de conocimiento:

(1) *el conocimiento de los temas (KoT)*. Las categorías asociadas al subdominio son: 1.1. Procedimientos, 1.2. Definiciones, propiedades y sus fundamentos, 1.3. Registros de representación, 1.4. Fenomenología y aplicaciones.

(2) *el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM)*. Las categorías asociadas al subdominio son: 2.1. Conexiones de complejización, 2.2. Conexiones de simplificación, 2.3. Conexiones transversales, 2.4. Conexiones auxiliares.

(3) *el conocimiento de la práctica matemática (KPM)*. Los indicadores² asociados al subdominio son: 3.1. Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, 3.2. Formas de validación y demostración, 3.3. Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, 3.4. Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, 3.5. Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación), 3.6. Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

MTSK: Dominio del conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK) y subdominios.

De acuerdo con la Figura 2, para Carrillo et al (2018) el **PCK** se subdivide en tres subdominios de conocimiento:

(1) *el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)*. Las categorías asociadas al subdominio son: 1.1. Teorías de la enseñanza, 1.2. Recursos materiales y digitales, 1.3. Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

² Las categorías asociadas al subdominio no se han logrado establecer, por el momento se consignan dos perspectivas del conocimiento de la práctica matemática, una general y otra específica. De acuerdo a Carreño (2021) citando los trabajos de Flores (2016; 2019), Campos y Flores (2019) y Delgado (2020), se proponen los descriptores asociados a este subdominio, los cuales pueden vincularse a una perspectiva general o particular del conocimiento de la práctica matemática.

(2) *el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)*. Las categorías asociadas al subdominio son: 2.1. Teorías del aprendizaje, 2.2. Fortalezas y debilidades, 2.3. Formas de interacción con un contenido matemático, 2.4. Aspectos emocionales.

(3) *el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS)*. Las categorías asociadas al subdominio son: 3.1. Expectativas de aprendizaje, 3.2. Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, 3.3. Secuenciación de temas.

MTSK: Dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con la Figura 2, las creencias y concepciones se representan en el centro de la figura para ilustrar la relación biyectiva entre las creencias y concepciones con los dominios del conocimiento (Carrillo et al., 2018), donde las creencias y concepciones impregnan el **MK** y **PCK**. Para Thompson (1992) (citado por Escudero y Carrillo, 2020) las creencias y concepciones no son entendidas como verdades impersonales, por el contrario, se sostienen individual y/o colectivamente por el sujeto, se derivan de la experiencia o el pensamiento, se basan en componentes emocionales y valorativas, por tanto, pueden tener grados de convencimiento. No cumplen con uno de los dos pilares del método científico, la falsabilidad o refutabilidad, es decir, no tienen la capacidad de ser sometidas a potenciales pruebas que las contradigan, ya que, pueden, estar justificadas con argumentos que no responden a las reglas de evidencia (Escudero y Carrillo, 2020).

Método

A partir de la revisión bibliográfica, se identificó que el modelo TPACK de Mishra y Koehler (2006; 2008) es la propuesta de integración de la tecnología al proceso de enseñanza y aprendizaje más utilizada y reconocida actualmente. También se identificó que el modelo de conocimiento MTSK de Carrillo et al (2018) es un instrumento de análisis muy potente y actual, en construcción continua, que permite determinar los conocimientos especializados de un profesor de

matemáticas, presentando similitud con el TPACK, puesto que ambos modelos tienen su génesis en el PCK de Shulman (1986; 1987).

Se profundizó teóricamente en ambos modelos para intentar realizar una propuesta de integración de la tecnología al modelo MTSK tomando como referencia la forma en que lo teoriza el modelo TPACK, obteniendo como resultado una propuesta que sirvió de hipótesis inicial a la problemática principal de integración de la dimensión tecnológica al modelo MTSK.

Análisis de videos

En el trabajo empírico se ha realizado un acercamiento a la realidad desde el paradigma interpretativo (Colás y Buendía, 1998), a través de un estudio de caso (Stake, 2000).

La información recogida se refiere al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica para estudiantes de 4º de la E.S.O, correspondiente a dos sesiones de clase, introductorias del tema, impartidas por un profesor experto⁴ y grabadas previamente en el contexto de un proyecto de investigación colaborativa en el que participaba el profesor observado.

Los videos de las dos sesiones de clase fueron observados en reiteradas ocasiones para tener un primer acercamiento a las temáticas particulares tratadas y la transformación de los conceptos matemáticos de esas temáticas para ser enseñados y aprendidos, utilizando un recurso tecnológico durante el proceso, particularmente, el software GeoGebra.

Posterior a la observación, se realizó una organización de los datos (Figura 3), por episodios⁵, distinguiendo la disciplina, el área de conocimiento de la disciplina, la temática general, las temáticas particulares, el recurso tecnológico, la descripción general de la actividad, los minutos, la transcripción y la captura de las imágenes más representativas.

⁴ Algunos conocimientos de este profesor experto ya fueron estudiados en Carmona (2012).

⁵ Conjunto de sucesos ordenados cronológicamente y enlazados a una actividad de enseñanza-aprendizaje

Organización de datos	
Video 1: EPISODIO N°1	
Disciplina: Matemática	
Área del conocimiento de la disciplina: Geometría	
Temática general: Geometría Analítica	
Temáticas particulares: Punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia, puntos externos a la circunferencia, criterios de selección.	
Recurso tecnológico: Software GeoGebra	
Descripción general de la actividad: El profesor presenta en la pizarra la temática general a desarrollar. El planteamiento de un problema geométrico en contexto real hipotético, como una actividad de introducción a la Geometría Analítica. El problema plantea tres puntos, dos puntos fijos y un punto móvil, buscando ¿cómo determinar un criterio matemático para relacionar el punto móvil con los dos puntos fijos utilizando GeoGebra? de tal manera que se obtenga una solución contextualizada, para recordar los conceptos de punto, segmento, recta, distancia y medidas. A partir de las estrategias de solución planteadas por los estudiantes, surgen otros conceptos, entonces también recuerda los conceptos de circunferencia, arco de circunferencia y puntos externos a la circunferencia. Después de constantes disertaciones del profesor, discusiones entre el profesor y los estudiantes, y experimentación con el software GeoGebra, se plantean técnicas (alternativas) de solución al problema utilizando el criterio de distancia entre puntos.	
Minuto	Transcripción
01:18	<p>Profesor: Bueno, vamos a empezar hoy con un tema nuevo, el tema 8, el tema de Geometría Analítica. Vamos a empezar con una introducción y lo vamos a llamar 8.0. Ok voy a proponer el siguiente problema: Imaginad que en una ciudad hay dos colegios, y se quiere saber, a qué colegio le corresponde ir a un estudiante que viva en P.</p> <p>Tenemos por tanto dos colegios y un estudiante de ese pueblo, de esa ciudad. Vamos a llamar a los colegios A y B. De manera que tenéis que tener tres letras A, B y P ¿de acuerdo?</p> <p>Bueno, quiero que os ayudéis de GeoGebra para resolver el problema.</p> <p>¿Tenéis la ventana de GeoGebra abierta? ¿Todos habéis podido entrar ya?</p>

Figura 3. Organización de datos

Una vez organizados los datos, se procedió con el análisis desde los modelos MTSK y TPACK, para lo cual fue necesario seleccionar unidades de información (Bardín, 1986) y construir una tabla (Figura 4) con los elementos⁶ necesarios para determinar los conocimientos evidenciados, destacando en el constructo, los subdominios KMT y KFLM del MTSK, así como los dominios TPK (enseñanza), TPK (aprendizaje) y TCK del TPACK, que permitiría filtrar e interpretar las unidades de información de cada episodio, para determinar indicadores de conocimiento evidenciado.

ANÁLISIS DE DATOS				
-desde los modelos MTSK y TPACK-				
Video 1: EPISODIO N°1				
Temática general: Geometría Analítica				
Temáticas particulares: Punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia, puntos externos a la circunferencia, criterios de selección.				
Recurso tecnológico: Software GeoGebra				
Descripción general de la actividad: El profesor presenta en la pizarra la temática general a desarrollar. El planteamiento de un problema geométrico en contexto real hipotético, como una actividad de introducción a la Geometría Analítica. El problema plantea tres puntos, dos puntos fijos y un punto móvil, buscando ¿cómo determinar un criterio matemático para relacionar el punto móvil con los dos puntos fijos utilizando GeoGebra? de tal manera que se obtenga una solución contextualizada, para recordar los conceptos de punto, segmento, recta, distancia y medidas. A partir de las estrategias de solución planteadas por los estudiantes, surgen otros conceptos, entonces también recuerda los conceptos de circunferencia, arco de circunferencia y puntos externos a la circunferencia. Después de constantes disertaciones del profesor, discusiones entre el profesor y los estudiantes, y experimentación con el software GeoGebra, se plantean técnicas (alternativas) de solución al problema utilizando el criterio de distancia entre puntos.				
Interpretación detallada de los conocimientos especializados presentes				
Unidades de Información	Indicadores de conocimiento evidenciado			
UI	MTSK		TPACK (TPK, TCK)	
	Enseñanza	Aprendizaje	Enseñanza	Aprendizaje
UI1: "Sabéis que el GeoGebra es una herramienta matemática, un software muy útil para la resolución de problemas geométricos. Entonces, os aconsejo ocultar los ejes, para lo cual en la vista algebraica, es decir, la vista gráfica -persión-, la vista de la derecha, si hacéis clic con el botón derecho, os sale un menú ¿os sale un menú?"	KMT Muestra conocer sobre GeoGebra. (1) Que es un recurso digital matemático (software de matemáticas dinámicas) que puede emplear para enseñar a través de la resolución de problemas geométricos (determinar un criterio matemático para relacionar un punto móvil con dos puntos fijos).	KFLM (del recurso) Muestra conocer sobre GeoGebra. (1) Que la vista gráfica con las coordenadas cartesianas activadas puede añadir dificultad al introducir el tema de Geometría Analítica, cuando se realiza una actividad para rescatar conocimientos previos de conceptos matemáticos (punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia, puntos externos a la	TPK (1) Comprende la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para la enseñanza. (2) Reconoce la utilidad de la tecnología (software GeoGebra) en la resolución de problemas. Comprende que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática, particularmente: (1) Resolver problemas geométricos (determinar un criterio matemático para	TPK (1) Comprende la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para el aprendizaje. (2) Sabe que incorporar la tecnología (software GeoGebra) en el trabajo colaborativo, permite ambientes de aprendizaje donde los estudiantes interactúan con el contenido. (3) Entiende que algunas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad al introducir un tema con una actividad para rescatar conocimientos previos. TCK Comprende que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática, particularmente: (1) Resolver problemas geométricos (determinar un criterio matemático para

Figura 4. Análisis de datos desde los modelos MTSK y TPACK

⁶ Se mantuvo relación entre los elementos de la organización de los datos (Figura 3) por episodios, es decir, disciplina, área de conocimiento de la disciplina, temática general, temáticas particulares, recurso tecnológico y descripción general de la actividad.

Una vez obtenidos los indicadores de conocimiento evidenciado, se organizaron en una tabla de síntesis por video, episodio y unidad de información (Figura 5), para tener acceso a los indicadores de forma simbólica y de fácil manejo.

Síntesis 1.1.1				
Unidades de Información UI	Indicadores de conocimiento evidenciado			
	MTSK		TPACK	
	Enseñanza	Aprendizaje	Enseñanza	Aprendizaje
UI1	KMT1+KMT2+KMT3	KFLM1 (del recurso)	TPK1+TPK2	TPK1+TPK2+TPK3
			TCK1+TCK2+TCK3	

Figura 5. Síntesis por video, episodio y unidad de información (1.1.1)

Posteriormente, para tener una visión completa de todas las unidades de información y todos los indicadores presentes por video, se organizaron en una tabla resumen por video (Figura 6 y Figura 7),

Tabla resumen video 1				
Unidades de Información UI	Indicadores de conocimiento evidenciado			
	MTSK		TPACK	
	Enseñanza	Aprendizaje	Enseñanza	Aprendizaje
UI1	KMT1+KMT2+KMT3	KFLM1 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK3	TPK1+TPK2+TPK3
UI2	KMT2+ KMT3	KFLM1 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK2+TCK3	TPK1+TPK2+TPK3
UI3	KMT1+KMT2		TPK1+TPK2 TCK1+TCK2	TPK1+TPK2
UI4	KMT1+KMT2+ KMT3+ KMT4+KMT5+ KMT6	KFLM1 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK3+TCK4+TCK5+TCK6	TPK1+TPK2+TPK3
UI5	KMT1+KMT2+ KMT4+KMT5+KMT6	KFLM1 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6	TPK1+TPK2
UI6	KMT1+KMT2+KMT4+ KMT5+KMT6+KMT7		TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+ TCK5+TCK6+TCK7	TPK1+TPK2
UI7	KMT1+KMT2+KMT4+ KMT5+KMT6+KMT7		TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK7	TPK1+TPK2

Figura 6. Tabla resumen video 1

Tabla resumen video 2				
Unidades de Información UI	Indicadores de conocimiento evidenciado			
	MTSK		TPACK	
	Enseñanza	Aprendizaje	Enseñanza	Aprendizaje
UI17	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11	KFLM5 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11	TPK1+TPK2+TPK7
UI18	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11		TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11	TPK1+TPK2
UI19	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11+KMT12	KFLM6 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4+TPK8
UI20	KMT1+KMT2+KMT3+KMT4 +KMT5+KMT6+KMT11+KMT12	KFLM6 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK3+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4+TPK8
UI21	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11+KMT12		TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4
UI22	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11+KMT12	KFLM6 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4+TPK8
UI23	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11+KMT12	KFLM6 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4+TPK8
UI24	KMT1+KMT2+KMT4+KMT5 +KMT6+KMT11+KMT12	KFLM6 (del recurso)	TPK1+TPK2 TCK1+TCK2+TCK4+TCK5+TCK6+TCK11+TCK12	TPK1+TPK2+TPK4+TPK8

Figura 7. Tabla resumen video 2

Por último, se cuantificó la presencia de cada indicador en todas las unidades de información de ambos videos y se organizó en una tabla de resultados con MTSK (KMT) (Figura 8), una tabla de resultados con MTSK (KFLM) (Figura 9), una tabla de resultados con TPACK (TCK) (Figura 10) y una tabla de resultados con TPACK (TPK) (Figura 11).

Resultados con MTSK (KMT)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
KMT1	Conoce que GeoGebra es un recurso digital matemático, un software de matemáticas dinámicas, que puede emplear para enseñar a través de la resolución de problemas geométricos, particularmente, cuando se pretende determinar semiplanos-zonas de influencia o diagrama de Voronoi- considerando tres puntos fijos y un punto móvil en la vista gráfica.	26
KMT2	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de visualizar los objetos matemáticos en su representación algebraica (vista algebraica) y su representación gráfica (vista gráfica).	27
KMT3	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de activar o desactivar las coordenadas cartesianas en la vista gráfica.	5
KMT4	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de representar objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) en la vista gráfica.	24
KMT5	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de asociarle notación matemática a los objetos geométricos (puntos y segmentos) y modificarla.	19
KMT6	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento).	24
KMT7	Conocer que GeoGebra proporciona la oportunidad de obtener sin cálculos la medida de segmentos (distancia entre dos puntos).	11

Figura 8. Resultados con MTSK (KMT)

Resultados con MTSK (KFLM)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
KFLM1	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica, con las coordenadas cartesianas activadas, puede añadir dificultad al introducir el tema de Geometría Analítica, cuando se realiza una actividad para rescatar conocimientos previos de conceptos matemáticos (punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia y puntos externos a la circunferencia).	4
KFLM2	Conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas y circunferencias) para determinar propiedades.	2
KFLM3	Conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos y segmentos) para construir definiciones.	1
KFLM4	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica, si no se nombran (etiquetan) los objetos geométricos (puntos) puede añadir dificultad de aprendizaje.	1
KFLM5	Conoce que GeoGebra puede añadir dificultad de aprendizaje al utilizar la barra de entrada algebraica para representar los objetos geométricos (puntos).	1
KFLM6	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica puede añadir dificultad de aprendizaje para determinar patrones si las coordenadas de los puntos son números decimales.	6

Figura 9. Resultados con MTSK (KFLM)

Resultados con TPACK (TCK)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
TCK1	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de resolver problemas geométricos (determinar un criterio matemático para relacionar un punto móvil con dos puntos fijos).	26
TCK2	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar los objetos matemáticos de forma algebraica (vista algebraica) y gráfica (vista gráfica).	27
TCK3	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar los objetos matemáticos con y sin coordenadas cartesianas en la vista gráfica.	5
TCK4	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar objetos geométricos (puntos) en la vista gráfica.	24
TCK5	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de asociar y modificar notación matemática a los objetos geométricos (puntos).	19
TCK 6	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos, segmentos y la mediatriz de un segmento).	24

Figura 10. Resultados con TPACK (TCK)

Resultados con TPACK (TPK)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
TPK1 (enseñanza)	Conoce la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para la enseñanza.	27
TPK2 (enseñanza)	Conoce la utilidad de la tecnología (software GeoGebra) en la resolución de problemas.	27
TPK1 (aprendizaje)	Conoce la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para el aprendizaje.	27
TPK2 (aprendizaje)	Conoce que incorporar la tecnología (software GeoGebra) en el trabajo colaborativo, permite ambientes de aprendizaje donde los estudiantes interactúan con el contenido y aprenden por experimentación.	27
TPK3 (aprendizaje)	Conoce que algunas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad al introducir un tema con una actividad para rescatar conocimientos previos.	2
TPK4 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) para determinar propiedades.	9
TPK5 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos y segmentos) para construir definiciones.	1
TPK6 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología puede añadir dificultad de aprendizaje si no se nombran correctamente (etiquetan) los objetos (geométricos).	1

Figura 11. Resultados con TPACK (TPK)

Resultados

Los conocimientos tecnológicos pedagógicos de contenido que manifiesta un profesor experto de matemáticas son conocimientos tecnológicos de contenido para la enseñanza y aprendizaje. Estos conocimientos son conocimiento didáctico del contenido, donde lo tecnológico caracteriza o condiciona el contexto de enseñanza-aprendizaje.

Como resultado del análisis de los datos con el modelo MTSK, fueron observados, identificados e interpretados 14 indicadores de KMT ubicables en la categoría de recursos de enseñanza (Tabla 1), 6 indicadores de KFLM; estos últimos podrían ubicarse en una categoría referida a recursos de aprendizaje (Tabla 2), consideración que se analizará en el siguiente epígrafe de discusión.

Desde el análisis con el modelo TPACK, que fueron observados, identificados e interpretados fueron 14 indicadores de TCK (Tabla 3), 2 indicadores de TPK para la enseñanza y 8 TPK para el aprendizaje (Tabla 4).

Resultados con MTSK (KMT)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
KMT1	Conoce que GeoGebra es un recurso digital matemático, un software de matemáticas dinámicas, que puede emplear para enseñar a través de la resolución de problemas geométricos, particularmente, cuando se pretende determinar semiplanos -zonas de influencia o diagrama de Voronoi- considerando tres puntos fijos y un punto móvil en la vista gráfica.	26
KMT2	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de visualizar los objetos matemáticos en su representación algebraica (vista algebraica) y su representación gráfica (vista gráfica).	27

Resultados con MTSK (KMT)		
KMT3	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de activar o desactivar las coordenadas cartesianas en la vista gráfica.	5
KMT4	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de representar objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) en la vista gráfica.	24
KMT5	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de asociarle notación matemática a los objetos geométricos (puntos y segmentos) y modificarla.	19
KMT6	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento).	24
KMT7	Conocer que GeoGebra proporciona la oportunidad de obtener sin cálculos la medida de segmentos (distancia entre dos puntos).	11
KMT8	Conoce que GeoGebra proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de continuar con las representaciones de objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento), o de empezar de nuevo con las representaciones.	7
KMT9	Conoce que GeoGebra proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de representar de dos formas distintas la mediatriz de un segmento.	3
KMT10	Conoce que GeoGebra proporciona en la vista gráfica, la oportunidad importar e insertar imágenes (particularmente un mapa) para representar objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) sobre la imagen importada, y determinar semiplanos (zonas de influencia).	1
KMT11	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de complementar la vista algebraica y la vista gráfica para enseñar Geometría Analítica.	12
KMT12	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de representar objetos geométricos (puntos y rectas) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros.	8
KMT13	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de comprobar la proporcionalidad de las coordenadas de los puntos de una recta.	1
KMT14	Conoce que GeoGebra proporciona la oportunidad de plantear y resolver problemas con diferentes soluciones.	1

Tabla 1. MTSK (KMT) Indicadores, descripción y cantidad de unidades de información en la que está presente cada indicador

Resultados con MTSK (KFLM)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
KFLM1	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica, con las coordenadas cartesianas activadas, puede añadir dificultad al introducir el tema de Geometría Analítica, cuando se realiza una actividad para rescatar conocimientos previos de conceptos matemáticos (punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia y puntos externos a la circunferencia).	4
KFLM2	Conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas y circunferencias) para determinar propiedades.	2
KFLM3	Conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos y rectas) para construir definiciones.	1
KFLM4	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica, si no se nombran (etiquetan) los objetos geométricos (puntos) puede añadir dificultad de aprendizaje.	1

KFLM5	Conoce que GeoGebra puede añadir dificultad de aprendizaje al utilizar la barra de entrada algebraica para representar los objetos geométricos (puntos).	1
KFLM6	Conoce que GeoGebra en la vista gráfica puede añadir dificultad de aprendizaje para determinar patrones si las coordenadas de los puntos son números decimales.	6

Tabla 2. MTSK (KFLM) Indicadores, descripción y cantidad de unidades de información en la que está presente cada indicador

Resultados con TPACK (TCK)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
TCK1	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de resolver problemas geométricos (determinar un criterio matemático para relacionar un punto móvil con dos puntos fijos).	26
TCK2	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar los objetos matemáticos de forma algebraica (vista algebraica) y gráfica (vista gráfica).	27
TCK3	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar los objetos matemáticos con y sin coordenadas cartesianas en la vista gráfica.	5
TCK4	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar objetos geométricos (puntos) en la vista gráfica	24
TCK5	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de asociar y modificar notación matemática a los objetos geométricos (puntos).	19
TCK6	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos, segmentos y la mediatriz de un segmento).	24
TCK7	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de determinar la medida de segmentos (distancia entre dos puntos) sin utilizar cálculos.	11
TCK8	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de empezar una nueva representación de objetos geométricos (puntos, segmentos y la mediatriz de un segmento) o de continuar con una antigua representación.	7
TCK9	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar en la vista gráfica la mediatriz de un segmento de dos formas distintas, a partir de las propiedades de la mediatriz de un segmento (equidistancia, perpendicularidad y pasar por el punto medio).	3
TCK10	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de determinar semiplanos (zonas de influencia o diagramas de Voronoi) en la vista gráfica.	1
TCK11	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de hacer Geometría Analítica complementando la vista algebraica y la vista gráfica.	12
TCK12	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de representar objetos geométricos (puntos y rectas) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros.	8
TCK13	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de comprobar la proporcionalidad de las coordenadas de los puntos de una recta.	1

Resultados con TPACK (TCK)		
TCK14	Conoce que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de plantear y resolver problemas con diferentes soluciones.	1

Tabla 3. TPACK (TCK) Indicadores, descripción y cantidad de unidades de información en la que está presente cada indicador

Resultados con TPACK (TPK)		
Indicadores de conocimiento	Descripción	Cantidad de UI
TPK1 (enseñanza)	Conoce la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para la enseñanza.	27
TPK2 (enseñanza)	Conoce la utilidad de la tecnología (software GeoGebra) en la resolución de problemas.	27
TPK1 (aprendizaje)	Conoce la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para el aprendizaje.	27
TPK2 (aprendizaje)	Conoce que incorporar la tecnología (software GeoGebra) en el trabajo colaborativo, permite ambientes de aprendizaje donde los estudiantes interactúan con el contenido y aprenden por experimentación.	27
TPK3 (aprendizaje)	Conoce que algunas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad al introducir un tema con una actividad para rescatar conocimientos previos.	2
TPK4 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) para determinar propiedades.	9
TPK5 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos y segmentos) para construir definiciones.	1
TPK6 (aprendizaje)	Conoce que la tecnología puede añadir dificultad de aprendizaje si no se nombran correctamente (etiquetan) los objetos (geométricos).	1
TPK7 (aprendizaje)	Conoce que ciertos componentes de la tecnología pueden añadir dificultad de aprendizaje.	1
TPK8 (aprendizaje)	Conoce que ciertas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad de aprendizaje.	6

Tabla 4. TPACK (TPK) Indicadores, descripción y cantidad de unidades de información en la que está presente cada indicador

Mostraremos a continuación evidencias de los datos que nos llevan a justificar el conocimiento expresado en los indicadores anteriores.

El profesor muestra conocer sobre GeoGebra que es un recurso digital matemático, un software de matemáticas dinámicas, que puede emplear para enseñar a través de la resolución de problemas geométricos (KMT1, tabla 1), que proporciona la oportunidad de visualizar los objetos matemáticos en su representación algebraica (vista algebraica) y su representación gráfica (vista

gráfica) (KMT2, tabla 1); y que proporciona la oportunidad de activar o desactivar las coordenadas cartesianas en la vista gráfica (KMT3, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI1: *“Sabéis que el GeoGebra es una herramienta matemática, un software muy útil para la resolución de problemas geométricos. Entonces, os aconsejo ocultar los ejes, para lo cual, en la vista algebraica, es decir, la vista gráfica -perdón-, la vista de la derecha, si hacéis click con el botón derecho, os sale un menú ¿os sale un menú?”*

[Unidad 1, Sesión 1 y Episodio 1]

También observamos en la unidad anterior, que el profesor conoce que GeoGebra en la vista gráfica, con las coordenadas cartesianas activadas, puede añadir dificultad al introducir el tema de Geometría Analítica, cuando se realiza una actividad para rescatar conocimientos previos de conceptos matemáticos (punto, segmento, distancia, medidas, recta, circunferencia, radio, arco de circunferencia, propiedades de la circunferencia, centro de la circunferencia y puntos externos a la circunferencia) (KFLM1, tabla 2).

Analizada la misma Unidad 1 desde las lentes del TPACK, el profesor muestra conocimientos tecnológicos de contenido. Al respecto, muestra conocer que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática de resolver problemas geométricos (determinar un criterio matemático para relacionar un punto móvil con dos puntos fijos) (TCK1, tabla 3); representar los objetos matemáticos de forma algebraica (vista algebraica) y gráfica (vista gráfica) (TCK2, tabla 3); y representar los objetos matemáticos con y sin coordenadas cartesianas en la vista gráfica (TCK3, tabla 3).

Además, observamos también en la unidad anterior que el profesor muestra conocimientos tecnológicos pedagógicos. Respecto a la enseñanza, conoce la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para la enseñanza (TPK1 enseñanza, tabla 4), conoce la utilidad de la tecnología (software GeoGebra) en la resolución de problemas (TPK2 enseñanza, tabla 4). Respecto al aprendizaje, conoce la importancia de incorporar la tecnología

(software GeoGebra) como un recurso para el aprendizaje (TPK1 aprendizaje, tabla 4), conoce que incorporar la tecnología (software GeoGebra) en el trabajo colaborativo, permite ambientes de aprendizaje donde los estudiantes interactúan con el contenido y aprenden por experimentación (TPK2 aprendizaje, tabla 4), y conoce que algunas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad al introducir un tema con una actividad para rescatar conocimientos previos (TPK3 aprendizaje, tabla 4).

Asimismo, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona la oportunidad de representar objetos geométricos (puntos) en la vista gráfica (KMT4, tabla 1), que proporciona la oportunidad de asociarle notación matemática a los objetos geométricos (puntos y segmentos) y modificarla (KMT5, tabla 1), y que proporciona la oportunidad de representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos) (KMT6, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI4: “¿Todo el mundo ha desactivado los ejes y la cuadrícula? Centraros en la ventana gráfica -la parte de la derecha-. GeoGebra permite representar puntos, ver cada una de las herramientas (íconos) debajo del menú, ¿qué tenéis que representar?, ¿cómo podéis empezar? Tenéis que presentar los dos colegios, posiciones arbitrarias -¿no?- y tenéis que representar el punto P. Sabéis ¿cómo renombrar los elementos una vez que se sitúen? ¿cómo se puede situar un punto en la ventana gráfica? Simplemente haciendo click en el ícono segundo donde está el punto A, se hace click sobre ese ícono y se coloca donde queráis. Tendréis que colocar ¿qué?, dos puntos ¿no?, uno para cada colegio, y un tercer punto ¿no? ¿sí? Tendréis que colocar A, B y P.”

[Unidad 4, Sesión 1 y Episodio 1]

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 4, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de representar objetos geométricos (puntos) en la vista gráfica (TCK4, tabla 3), asociar y modificar notación matemática a los objetos geométricos (puntos) (TCK5, tabla 3), y representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos, segmentos y la mediatriz de un segmento) (TCK6, tabla 3).

Igualmente, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona la oportunidad de obtener sin cálculos la medida de segmentos (distancia entre dos puntos) (KMT7, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI6: *“Eso se puede hacer con GeoGebra, ¿cómo se llama lo que he representado entre A y P? Esto es un segmento de recta, es un segmento, y la distancia es lo que mide el segmento. ¿Cómo se puede representar esto? Intentadlo. Representar un segmento desde el punto P a A y otro desde el punto P a B. Luego, le pedís que os dé el valor del segmento, lo que mide.”* [Unidad 6, Sesión 1 y Episodio 1]

Analizada esta Unidad 6 desde las lentes del TPACK, el profesor también muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de determinar la medida de segmentos (distancia entre dos puntos) sin utilizar cálculos (TCK7, tabla 3).

Incluso, el profesor conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos) para determinar propiedades (KFLM2, tabla 2). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI11: *“GeoGebra nos permite jugar con los puntos, mover los puntos a vuestro antojo, para investigar propiedades. Sabéis también que podéis cambiar los nombres, en lugar de A y B, podéis llamarla Colegio A, Colegio B, eso con botón derecho en propiedades”* [Unidad 11, Sesión 1 y Episodio 2]

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 11, el profesor conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) para determinar propiedades (TPK4 aprendizaje, tabla 4).

Además, el profesor conoce que GeoGebra le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos, segmentos y rectas) para construir definiciones (KFLM3, tabla 2). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI12: *“La mediatriz del segmento, ¿de qué segmento me hablas? Me proponéis trazar el segmento entre A y B. Podéis borrar la vista gráfica vuestra e ir haciendo esto. Borrar la vista gráfica, pintar de nuevo el punto A, el punto B. ¿Para qué he nombrado la mediatriz? ¿a todos os suena? Trazamos el segmento AB, ¿qué significa mediatriz? ¿cómo se definiría?”* [Unidad 12, Sesión 1 y Episodio 2]

Analizada esta Unidad 12 desde las lentes del TPACK, el profesor conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al estudiante con los objetos geométricos (puntos y segmentos) para construir definiciones (TPK5 aprendizaje, tabla 4).

Adicionalmente, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de continuar con las representaciones de objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento), o de empezar de nuevo con las representaciones (KMT8, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI13: *“Bueno, eso es zona de influencia, pero en matemáticas se llaman semiplanos, cada semiplano es una zona de influencia. Muy bien. Vamos a ver ¿qué pasa si tenemos tres colegios? Os propongo el mismo estudio con lo que sabéis ya, con tres colegios. Borrada la vista gráfica, podéis partir de cero si queréis, o podéis añadirla a lo que ya tenéis ¿de acuerdo? Hacemos tres colegios A, B y C. El punto P que de nuevo es la casa del estudiante, colocando arbitrariamente donde esté. ¿Qué zonas, regiones habría ahora que considerar? Os aconsejo que etiquetéis los puntos como Colegio A, Colegio B y Colegio C.”* [Unidad 13, Sesión 1 y Episodio 3]

Observamos también en la unidad anterior que el profesor conoce que GeoGebra en la vista gráfica, si no se nombran (etiquetan) los objetos geométricos (puntos) puede añadir dificultad de aprendizaje (KFLM4, tabla 2).

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 13, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de empezar una nueva representación de objetos geométricos (puntos, segmentos y la mediatriz de un segmento) o de continuar con una

antigua representación (TCK8, tabla 3). Incluso, conoce que la tecnología puede añadir dificultad de aprendizaje si no se nombran correctamente (etiquetan) los objetos (geométricos) (TPK6 aprendizaje, tabla 4).

Además, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de representar de dos formas distintas la mediatriz de un segmento (KMT9, tabla 1).

Lo observamos en la unidad que sigue:

UI14: “Para trazar la mediatriz a este segmento (BC) ¿qué hago? ¿recordáis el procedimiento que hizo Cristina? Señalo el punto medio, y ¿ahora qué hago para la mediatriz? O bien lo hago con circunferencias como lo hizo Cristina o como dice Estrella, desde el punto medio puedo trazar una perpendicular ¿será lo mismo? A partir del punto medio una perpendicular, esto con GeoGebra lo vais hacer perfecto, y esto se repetiría para A y C, se unirían los colegios A y C, y tendríamos una tercera mediatriz ¿estáis de acuerdo? Con GeoGebra la mediatriz se puede hacer de varias maneras, intentad hacer esa representación.” [Unidad 14, Sesión 1 y Episodio 3]

Analizada esta Unidad 14 desde las lentes del TPACK, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de representar en la vista gráfica la mediatriz de un segmento de dos formas distintas, a partir de las propiedades de la mediatriz de un segmento (equidistancia, perpendicularidad y pasar por el punto medio) (TCK9, tabla 3).

Asimismo, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de importar e insertar imágenes (particularmente un mapa) para representar objetos geométricos (puntos, segmentos, rectas, circunferencias y la mediatriz de un segmento) sobre la imagen importada, y determinar semiplanos (zonas de influencia) (KMT10, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI15: “Suponiendo que fueran todos iguales, trazar el mapa escolar (¿a qué nos referimos con el mapa escolar? Lo que antes hemos obtenido que hemos dicho que suele llamarse diagramas de Voronoi. Un dibujito del mapa de Ayamonte, con líneas,

curvas, lo que os salga, con las zonas de influencia...) ¿Cómo os podéis ayudar? Os podéis ayudar de Google maps (¿sabéis buscar una localidad en Google maps? Pues buscáis Ayamonte y tenéis el mapa de Ayamonte, localizáis los colegios y esa imagen la podéis llevar a GeoGebra y ahora podréis construir encima)” [Unidad 15, Sesión 1 y Episodio 3]

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 15, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de determinar semiplanos (zonas de influencia o diagramas de Voronoi) en la vista gráfica (TCK10, tabla 3).

Igualmente, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona en la vista gráfica, la oportunidad de complementar la vista algebraica y la vista gráfica para enseñar Geometría Analítica (KMT11, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI16: “Vamos a hacer una cosa, tenéis la construcción hecha todavía ¿no? Nos vamos a la vista gráfica, en la vista gráfica, botón derecho, vamos a decirle ahora que se muestre ejes y cuadrícula. ¿Qué veis ahora? Que detrás de los elementos geométricos ¿qué hay? Un sistema de coordenadas ¿no? No hemos hablado nada de la vista algebraica que tiene a la izquierda GeoGebra” [Unidad 16, Sesión 1 y Episodio 3]

Analizada esta Unidad 16 desde las lentes del TPACK, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de hacer Geometría Analítica complementando la vista algebraica y la vista gráfica (TCK11, tabla 3).

Además, el profesor conoce que GeoGebra puede añadir dificultad de aprendizaje al utilizar la barra de entrada algebraica para representar los objetos geométricos (puntos). (KFLM5, tabla 2).

Lo observamos en la unidad que sigue:

UI17: “Os voy a proponer una actividad práctica con GeoGebra. Quiero que me calculéis o investiguéis las coordenadas de un vector conocido su origen y extremo ¿cómo lo vais hacer? Primero: abrimos GeoGebra. Segundo: situáis dos puntos. Los

puntos se pueden hacer ¿tenéis abierto ya GeoGebra? Los puntos los podéis situar, hacer de diferentes maneras, lo podéis escribir en la línea de entrada, o bien, simplemente, lo más fácil es, a través del ícono segundo se hace click en ese ícono y se colocan los puntos donde os parezca. Luego, le vamos a pedir al programa que nos dé las coordenadas de esos puntos ¿cómo se hace eso?” [Unidad 17, Sesión 2 y Episodio 3]

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 17, el profesor conoce que ciertos componentes de la tecnología pueden añadir dificultad de aprendizaje (TPK7 aprendizaje, tabla 4).

Además, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona la oportunidad de representar objetos geométricos (puntos y rectas) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros (KMT12, tabla 1). También conoce que GeoGebra en la vista gráfica puede añadir dificultad de aprendizaje para determinar patrones si las coordenadas de los puntos son números decimales (KFLM6, tabla 2).

Lo observamos en la unidad que sigue:

UI19: “Lo más normal es que el punto tenga coordenadas con números decimales ¿por qué? Porque si uno hace click al azar en un plano cartesiano, ¿lo más normal es que encuentre números enteros o números decimales? ¿qué hay más? Números decimales hay más ¿verdad? Entonces va a salir con decimales. Como nosotros buscamos una expresión matemática los números decimales nos pueden despistar” [Unidad 19, Sesión 2 y Episodio 3]

Analizada esta Unidad 19 desde las lentes del TPACK, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de representar objetos geométricos (puntos y rectas) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros (TCK12, tabla 3). También conoce que ciertas

representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad de aprendizaje (TPK8 aprendizaje, tabla 4).

Incluso, el profesor muestra conocer sobre GeoGebra que proporciona la oportunidad de comprobar la proporcionalidad de las coordenadas de los puntos de una recta (KMT13, tabla 1), y de plantear y resolver problemas con diferentes soluciones (KMT14, tabla 1). Lo observamos en la unidad que sigue:

UI27: “Las coordenadas ¿qué sobre coordenadas? Llamemos solución 2 (esperando que la haya): ¿qué pasa con las coordenadas? Vamos a ver ¿cuántas rectas hay en el plano? Infinitas ¿no? Depende de la orientación a lo mejor responde a la pregunta de uno o de otro. Bueno, ya estáis planteando hipótesis sobre la proporcionalidad de las coordenadas. Aquí tú proponías (dirigiéndose al aporte del estudiante A) que fuera C (4,8). Es una hipótesis ¿no? ¿Tú lo has comprobado eso? ¿lo habéis comprobado? ¿se te cumple? ¿cómo has puesto los puntos alineados? ¿has pintado una recta y luego el otro punto sobre la recta?” [Unidad 27, Sesión 2 y Episodio 4]

Desde las lentes del TPACK, analizada esta Unidad 27, el profesor muestra conocer que el software GeoGebra le permite la práctica matemática de comprobar la proporcionalidad de las coordenadas de los puntos de una recta (TCK13, tabla 3), y de plantear y resolver problemas con diferentes soluciones (TCK14, tabla 3).

Discusión

Los indicadores de conocimientos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de un profesor experto son recogidos desde el TPACK como conocimientos tecnológicos de contenido TCK, ligados a los conocimientos tecnológicos pedagógicos TPK, contemplando la tecnología como parte del contexto de enseñanza-aprendizaje. Mientras tanto, son recogidos por el MTSK como conocimientos de la enseñanza de las matemáticas KMT y conocimientos de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM, contemplando la tecnología como recurso de enseñanza exclusivamente.

Situación que provocó dificultades, por ejemplo, en la siguiente unidad de información el profesor expresa:

UI22: *“Tendréis un punto A un punto B y un vector “u” que dará ciertas coordenadas, yo voy a llamar a1 y a2 las coordenadas de A, y b1 y b2 las coordenadas de B. Lo que quiero que hagáis es mover los puntos, eso se hace con la flechita, con la flechita que tenéis arriba, el primer ícono, podéis mover los puntos de sitio, fijaros que se moverá por la cuadrícula, de manera que sus coordenadas serán números enteros y os será más fácil obtener lo que queremos.”*

En la observación y el análisis desde el MTSK encontramos que el profesor muestra conocer que GeoGebra es un recurso digital que le ofrece la oportunidad de: (1) enseñar a través de la resolución de un problema geométrico -investigar las coordenadas de un vector si se conoce su origen y extremo- (KMT1, tabla1); (2) visualizar los objetos matemáticos en su representación algebraica (vista algebraica) y su representación gráfica (vista gráfica) (KMT2, tabla1); (3) representar objetos geométricos (puntos y vectores) en la vista gráfica (KMT4, tabla 1); (4) asociar notación matemática a los objetos geométricos (puntos y vectores) y modificarla (KMT5, tabla 1); (5) representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos y vectores) (KMT6, tabla 1); (6) complementar la vista algebraica y la vista gráfica para enseñar Geometría Analítica (KMT11, tabla 1); (7) representar objetos geométricos (puntos y vectores) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros (KMT12, tabla 1).

Estos indicadores de conocimiento encontraron correspondencia con el TPACK, considerando los TCK (KPM con tecnología) ligados⁷ con los TPK (enseñanza). Desde las lentes del TPACK, encontramos que el profesor muestra conocer que el software GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas que permite la práctica matemática⁸ de: (1) resolver problemas

⁷ Entendido desde el TPACK como conexiones e interacciones que provocan conjugación de conocimientos.

⁸ Conocimiento de la práctica matemática KPM en el MTSK.

geométricos -investigar las coordenadas de un vector si se conoce su origen y extremo- (TCK1, tabla 3); (2) representar los objetos matemáticos de forma algebraica (vista algebraica) y gráfica (vista gráfica) (TCK2, tabla 3); (3) representar objetos geométricos (puntos y vectores) en la vista gráfica (TCK4, tabla 3); (4) asociar y modificar notación matemática a los objetos geométricos (puntos y vectores) (TCK5, tabla 3); (5) representar de forma dinámica objetos geométricos (puntos y vectores) (TCK6, tabla 3); (6) hacer Geometría Analítica complementando la vista algebraica y la vista gráfica (TCK11, tabla 3); y representar objetos geométricos (puntos y vectores) al azar en el plano cartesiano de su vista gráfica y limitar su representación a coordenadas con números enteros (TCK12, tabla 3). Además, se encontró que muestra conocer: (1) la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para la enseñanza (TPK1 enseñanza, tabla 4); y (2) la utilidad de la tecnología (software GeoGebra) en la resolución de problemas (TPK2 enseñanza, tabla 4).

En la observación y el análisis desde el MTSK también encontramos que el profesor conoce que GeoGebra en la vista gráfica puede añadir dificultad de aprendizaje para determinar patrones si las coordenadas de los puntos son números decimales (KFLM6, tabla 2), que encontró alguna similitud con el indicador de conocimiento TPK8 (aprendizaje) del TPACK, el cual indica que el profesor conoce que ciertas representaciones de la tecnología pueden añadir dificultad de aprendizaje (TPK8 aprendizaje, tabla 4).

Sin embargo, un dato curioso es que en todas las unidades de información, desde el TPACK, se mantuvo presente que el profesor muestra que conoce: (1) la importancia de incorporar la tecnología (software GeoGebra) como un recurso para el aprendizaje (TPK1 aprendizaje, tabla 4); y (2) que incorporar la tecnología (software GeoGebra) en el trabajo colaborativo, permite ambientes de aprendizaje donde los estudiantes interactúan con el contenido y aprenden por experimentación (TPK2 aprendizaje, tabla 4).

Esto último se alinea con los resultados del análisis de esta unidad de información (UI22), la que mostró que el profesor conoce que la tecnología (software GeoGebra) le permite interactuar al

estudiante con los objetos geométricos (puntos y vectores) para determinar propiedades (TPK4 aprendizaje, tabla 4) y no fue posible encontrarle correspondencia con un KFLM.

Así las cosas, al contemplar el MTSK la tecnología como recurso de enseñanza exclusivamente, sin contemplar la interacción entre el contenido matemático y el estudiante, así como las fortalezas y dificultades de cómo las matemáticas son aprendidas con el uso de la tecnología, podría limitar el estudio de posibles conocimientos sobre las características del aprendizaje de las matemáticas con el uso de recursos, que posee un profesor.

Lo anterior no le resta potencia al KFLM, pues los KFLM (del recurso) mostraron sensibilidad para recoger indicadores de conocimiento, por ejemplo, en UI1 se recogió KFLM1 (del recurso) que se relaciona con TPK3 (aprendizaje); en UI11 se recogió KFLM2 (del recurso) que se relaciona con TPK4 (aprendizaje); en UI12 se recogió KFLM3 (del recurso) que se relaciona con TPK5 (aprendizaje); en UI13 se recogió KFLM4 (del recurso) que se relaciona con TPK6 (aprendizaje); en UI17 se recogió KFLM5 (del recurso) que se relaciona con TPK7 (aprendizaje); y en UI19, UI20, UI22, UI23, UI24 y UI27, se recogió KFLM6 (del recurso) que se relaciona con TPK8 (aprendizaje).

Referencias bibliográficas

- Arévalo, M. (2016). *Competencias TIC de los docentes de matemáticas en el marco del modelo TPACK. Una perspectiva para el desarrollo de buenas prácticas pedagógicas*. [Tesis de doctorado, Universidad de Salamanca]. <https://doi.org/10.14201/gredos.132898>
- Bardín, L. (1986). *El análisis del contenido*. Madrid: Akal.
- Calderón, J., Crespo, R., y Granados, J. (2014). Sociedades tecnológicas. *Sociedad y utopía: Revista de ciencias sociales*, 44, 18-33.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5546154>
- Carmona, E. y Climent, N. (2012). *Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1º de bachillerato*. Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 165 - 175). Jaén: SEIEM
- Carreño, E. (2021). *Conocimiento geométrico especializado en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria. Un estudio entorno a los polígonos*.
<http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/20140>
- Carrillo, J., y Martín, J. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas como fruto del cambio. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 147-152.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, Á., Ribeiro, M., y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Climent, N., Espinoza, G., Carrillo, J., Rivas, C., y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor A lesson on Thales' theorem viewed from the specialized teacher's knowledge. *Educación Matemática*, 33, 2021. <https://doi.org/10.24844/EM3301.04>
- Colás, M., y Buendía. (1998). *Investigación educativa*. Ediciones Alfar.

- Cox, S., y Graham, C. (2009). Diagramming TPACK in Practice: Using an Elaborated Model of the TPACK Framework to Analyze and Depict Teacher Knowledge. *TechTrends*, 53(5), 60. <https://doi.org/10.1007/s11528-009-0327-1>
- Delgado, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Escudero, D., y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 8-38. <https://doi.org/10.24844/EM3202.01>
- Koehler, M., Mishra, P., y Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 6(10), 9-23.
- Mishra, P., y Koehler, M. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Mishra, P., y Koehler, M. (2008). *Introducing Technological Pedagogical Content Knowledge*. 17.
- Muñoz, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): Un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18, 589-605.
- Niess, M. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 509-523. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.006>
- Saltos, A., Vallejo, P., y Moya, M. (2020). Innovación en educación matemática de básica superior durante el confinamiento por COVID-19. *EPISTEME KOINONIA*, 3, 142. <https://doi.org/10.35381/e.k.v3i5.723>

- Sánchez, C. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *HAMUT'AY*, 7(2), 46-57. <https://doi.org/10.21503/hamu.v7i2.2132>
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stake, R. E. (2000). Case Studies. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 435-453). Thousand Oaks, CA: Sage