TÍTULO

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA EN EL ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

AUTOR

Wilson Marcelo Román Vargas

Esta edición electrónica ha sido realizada en 2023

Tutoras	Dra. Dª. Mirian Codes Valcarce; Dra. Dª. Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez
Instituciones	Universidad Internacional de Andalucía ; Universidad de Huelva
Curso	*Máster en Investigación de la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias experimentales, sociales y matemáticas (2021-2022)*
©	Wilson Marcelo Román Vargas
©	De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía
Fecha documento	2022

Máster Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas

TFM

La educación matemática realista en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias

Realizado por:

Wilson Marcelo Román Vargas

Tutor:

Dra. MIRIAN CODES VALCARCE

Dra. NURIA DE LOS ÁNGELES CLIMENT RODRÍGUEZ

Curso académico:

2021 - 2022

Huelva, a 22 de junio de 2022

La educación matemática realista en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias

Realistic mathematical education in the study of ordinary differential equations

RESUMEN

El escenario didáctico generado por la pandemia del covid 19 ha afectado el proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias incidiendo en los niveles de comprensión y aplicabilidad de los conceptos matemáticos, en este sentido nos planteamos ¿qué comprensión matemática de las EDO lineales de segundo orden se propicia con un diseño de enseñanza basado en situaciones reales?

En la investigación se considera la perspectiva de la Educación Matemática Realista donde se describen los elementos de la comprensión matemática y se diseñan actividades didácticas enmarcadas en la solución de un problema de contexto real representado por un sistema dinámico, los resultados alcanzados muestran logros en la comprensión conceptual y en la fluidez de los procedimientos, pero se requiere rediseñar estrategias didácticas para fortalecer la predisposición productiva y la competencia estratégica en los estudiantes de la carrera de ingeniería mecatrónica.

PALABRAS CLAVE: Educación Matemática Realista, Comprensión Matemática, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Modelos matemáticos.

ABSTRACT

The didactic scenario generated by the covid 19 pandemic has affected the learning process of ordinary differential equations, affecting the levels of understanding and applicability of mathematical concepts, in this sense we ask ourselves what mathematical understanding of second-order linear ODEs Is it fostered with a teaching design based on real situations?

In the research, the perspective of Realistic Mathematics Education is considered, where the elements of mathematical understanding are described and didactic activities framed in the solution of a real context problem represented by a dynamic system are designed, the results achieved show achievements in understanding. conceptual and in the fluidity of the procedures, *but it is necessary to redesign didactic strategies to strengthen the productive predisposition and the strategic competence in the students of the mechatronics engineering career.*

KEYWORDS: Realistic Mathematics Education, Mathematical Comprehension, Ordinary Differential Equations, Mathematical Models.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los mayores problemas que se originan en el estudio de las ecuaciones diferenciales es priorizar el aprendizaje procedimental, provocando en el estudiante el desarrollo de largos y complicados procesos analíticos y memorísticos de carácter repetitivo que afectan el nivel de comprensión de los conceptos matemáticos estudiados (Dullius, 2011). Arslan (2010a y 2010b) enfatiza que el aprendizaje procedimental en el estudio de las ecuaciones diferenciales implica únicamente la memorización de operaciones sin la comprensión de los significados subyacentes. El aprendizaje conceptual implica la comprensión e interpretación de los conceptos y de las relaciones entre ellos.

Se debe considerar que el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) como parte de la formación académica de un estudiante de ingeniería, tiene trascendental importancia por la incidencia de la aplicación del conocimiento teórico y práctico en la solución de problemas vinculados al perfil de egreso del estudiante (Artigue, 2021). En este contexto, una inadecuada planificación y práctica docente, pueden conducir a generar situaciones de estrés y desmotivación que afectan directamente el aprendizaje de las EDO.

Actualmente hay un sinnúmero de investigaciones centradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDO. La mayor parte de los trabajos analizan las EDO de primer orden y utilizan la solución de problemas enfocándose en el análisis de las soluciones numéricas y gráficas; es decir, abordan la solución de un problema de aplicación de las EDO (Dullius, 2011; Perdomo, 2011; Farrás et al., 2011), destacando la identificación de las habilidades de los estudiantes para convertir información simbólica en gráfica y viceversa (Rasmussen y King 2000; Rasmussen y Keene, 2019; Hernández et al., 2017; Hernández et al., 2016).

El presente trabajo asume la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) con la finalidad de investigar sobre la comprensión matemática del estudiante. Por lo tanto, la investigación pretende dar respuesta a ¿qué comprensión matemática de las EDO lineales de segundo orden se propicia con un diseño de enseñanza basado en situaciones reales?

Considerando la perspectiva de la EMR se busca contribuir en el proceso de aprendizaje conceptual de las EDO siendo un complemento al aprendizaje procedimental que han adquirido los estudiantes al resolver ejercicios propuestos y que no tienen contexto real de aplicación.

En la investigación se trabajó con estudiantes de segundo nivel de la carrera de Ingeniería Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE (Latacunga-Ecuador). Se debe indicar que la relevancia del trabajo radica en las escasas publicaciones sobre la enseñanza de las EDO desde la perspectiva de la EMR para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

2. MARCO TEÓRICO

En la formación académica de un ingeniero, una de las actividades consiste en representar cantidades físicas, mecánicas, geométricas, económicas y otras mediante expresiones matemáticas que vinculen una función con sus derivadas dando origen a las ecuaciones diferenciales; por ende, varios fenómenos de la naturaleza pueden ser analizados a través de estas estructuras matemáticas.

La Educación Matemática Realista concibe la matemática como una actividad humana donde el estudiante pueda realizar su proceso de aprendizaje a través de la matematización de problemas de contexto real. El proceso didáctico de la reinvención guiada permite el desarrollo de la comprensión matemática a través de los diferentes contextos y modelos, siendo la fenomenología didáctica la metodología para la búsqueda de contextos y situaciones.

2.1 La Educación Matemática Realista

Schoenfeld (2016) argumenta que pensar matemáticamente se caracteriza por la capacidad de abstracción y generalización, así como, la competencia en la utilización de herramientas propias de la matemática. En este contexto, el proceso de enseñanza de la matemática debe consistir en la búsqueda de soluciones, la exploración de patrones y la formulación de conjeturas, y no sólo por la memorización de procedimientos y fórmulas que implican realizar ejercicios sin comprender lo que se está ejecutando.

La EMR referencia a Hans Freudenthal (1905-1990), como el pionero en promover un cambio en la educación matemática. Este autor promueve que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad y tiene que ser relevante para la sociedad (Gravemeijer y Terwel, 2000). Es decir, que la EMR promulga que los nuevos conocimientos, habilidades o actitudes en los estudiantes se consiguen a partir de confrontar su experiencia concreta, la observación reflexiva, la conceptualización abstracta y la experimentación activa en la solución de un problema real (De Lange, 1996; Bergsteiner et al., 2010).

Además, la EMR hace hincapié en la participación activa del estudiante en el quehacer matemático poniendo a su alcance un sinnúmero de actividades organizadas de matematización. De esta forma se plantea una propuesta didáctica orientada a cambiar la educación matemática tradicional centrada en aspectos mecánicos y memorísticos, para que pueda ser contextualizada como una educación matemática relacionada con el entorno real del estudiante, generando de esta manera, significado en su aprendizaje (Freudenthal, 2012).

Revisando a Freudenthal (2006), se puede establecer un proceso de matematización que permita orientar la EMR a los estudiantes. Este proceso generalmente se ha identificado como un conjunto de herramientas conceptuales para la práctica de la EMR. A continuación, se realiza una breve descripción de las mismas.

1. Plantear situaciones problemáticas realistas que puedan ser representables, y que motiven a los estudiantes a imaginar diferentes campos de aplicación en su contexto. En nuestro caso, un sistema masa-resorte-amortiguador.
2. Incentivar la utilización de modelos matemáticos mediante expresiones simbólicas, diagramas, esquemas u otros; convirtiéndolas en las herramientas idóneas para representar y organizar la actividad matemática del estudiante.
3. Generar una enseñanza interactiva; es decir, hacer que los estudiantes re-inventen ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas.
4. Departir con sus compañeros, en ambientes creados especialmente para que puedan explicar, reflexionar, justificar, acordar o disentir sobre la actividad académica realizada.
5. La reinvención guiada es concebida como la conjunción de roles y responsabilidades entre el docente y el estudiante a través de la interacción.

2.2 La comprensión matemática

Según Rodríguez et al. (2016) la comprensión matemática de un estudiante está dada en términos de relacionar el qué conoce, cómo lo conoce y para qué lo utiliza; es decir, evidencia su capacidad para integrar los elementos que forman un concepto, de seccionarlos para su análisis y de relacionar el concepto con otras ciencias y con la vida práctica.

Elementos de comprensión matemática

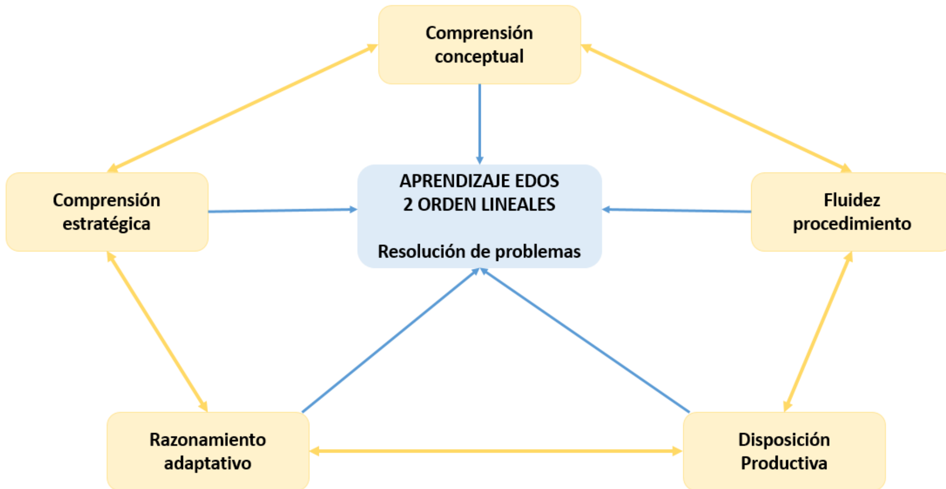
Perdomo (2010) identifica los elementos de comprensión matemática, que contribuyen directamente a evidenciar el aprendizaje cognitivo de las EDO (Zeynivandnezhad y Bates, 2018; Zeynivandnezhad, 2014); en la figura 1, se indica que es necesario que los elementos se encuentren interrelacionados.

- **Comprensión conceptual**: entiende los conceptos matemáticos y sus relaciones.
- **Fluidez en los procedimientos**: demuestra habilidad en la ejecución de los procedimientos para resolver el problema de forma flexible y correcta.
- **Competencia estratégica**: muestra habilidad para formular, representar y resolver problemas de aplicación de las EDO lineales.
- **Razonamiento adaptativo**: da a conocer su capacidad para pensar de forma lógica. Analiza, reflexiona, explica y justifica.
- **Predisposición productiva**: demuestra interés por el aprendizaje de las EDO al vincularlas con problemas de su contexto o del perfil profesional de la carrera.

Los elementos anteriores están relacionados en la figura 1, donde se ha ubicado a la resolución de un problema de contexto real como el centro de motivación para conseguir la comprensión matemática enmarcado en el aprendizaje de las EDO.

Figura 1.

Elementos de comprensión matemática para el estudio de las EDO



2.3 Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Las ecuaciones diferenciales son parte del análisis funcional, constituyendo una de las ramas de la matemática y están presente en diferentes campos de la ciencia (Khotimah y Masduki, 2016). En particular, en la formación de un ingeniero, es decir, en la educación matemática universitaria, generalmente se representa una ecuación diferencial lineal de segundo orden por la siguiente expresión matemática (Ross, 2021; Zill y Cullen, 2013).

$$a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)\,x = g(t) \tag{1}$$

En nuestra investigación, nos centramos en el análisis de los sistemas masa-resorte-amortiguador (MRA) y circuitos eléctricos (RLC) con una resistencia (R), una inductancia (L) y una capacitancia (C). En la Tabla 1 se presenta la descripción de sus elementos matemáticos que son parte de los sistemas dinámicos y que permiten aplicar los modelos matemáticos del problema planteado.

Tabla 1.

Elementos matemáticos de una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes

Sistema dinámico	**Elemento de análisis**	**Representación matemática**
Sistema RLC	Capacitor (C)	$V_C = \frac{1}{C}q$

$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=g(t)$	Resistencia (R)	$V_R=R\frac{dq}{dt}$
	Inductor (L)	$V_L=L\frac{d^2q}{dt^2}$
Sistema MRA $m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=g(t)$	Desplazamiento	x
	Velocidad	$v=\frac{dx}{dt}$
	Aceleración	$a=\frac{d^2x}{dt^2}$

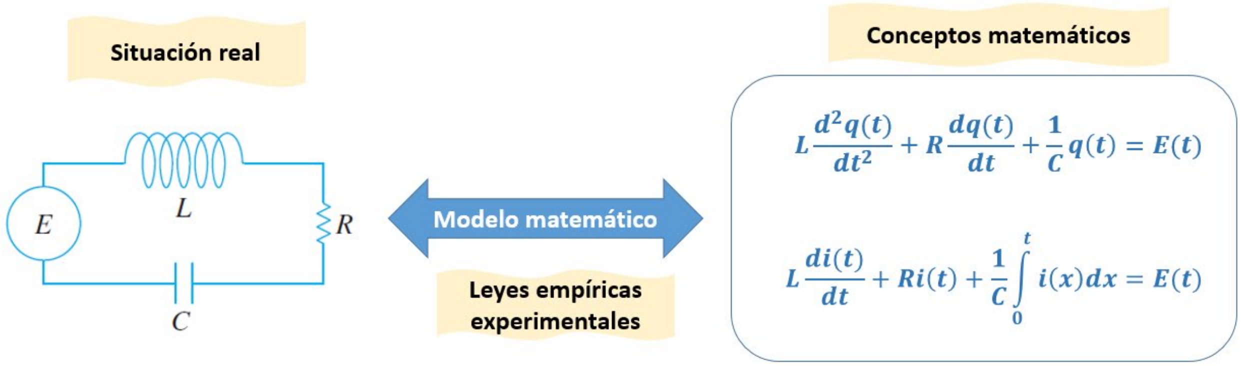
En el sistema MRA, la variación de valores en la masa (m), el amortiguador (β) y la constante de elasticidad del resorte (k) generan los escenarios didácticos de análisis y reflexión de la incidencia de los elementos matemáticos y sus variaciones. Por ejemplo, un valor pequeño en el amortiguador, significa inestabilidad del sistema, y justamente este concepto, el estudiante lo asocia con problemas de la vida real al relacionarlo con sistemas de amortiguamiento de vehículos, bicicletas y otros.

Como se había mencionado anteriormente, uno de los principios de la EMR es matematizar un problema de contexto real donde la utilización de modelos matemáticos representa uno de los desafíos para enseñar matemática (Camacho y Guerrero, 2015). Según Shahbari y Daher (2016) involucrar al estudiante en contextos de modelización matemática es proporcionarle recursos didácticos donde pueda describir, representar gráficamente e incluir lenguaje matemático para interpretar un problema de contexto real.

La investigación realizada por Schukajlow et al. (2018) se centra en analizar los trabajos que se han publicado con respecto a la modelización matemática. A partir de los resultados encontrados se desprende la necesidad de incorporar los modelos matemáticos en el plan curricular en especial a nivel superior. En este contexto, se plantea la matematización de un problema con la perspectiva que los estudiantes generen ideas matemáticas significativas al concebir el modelo matemático como una actividad que relaciona la situación real con los elementos matemáticos a través de las leyes empíricas que intervienen en determinado contexto. En la figura 2 se presentan los elementos para simbolizar, analizar y modelizar un problema de contexto real correspondiente a un sistema dinámico del circuito eléctrico RLC.

Figura 2.

Modelo matemático que representan el sistema dinámico del circuito eléctrico RLC



Un indicador de desempeño de los estudiantes de ingeniería es utilizar las EDO en una variedad de contextos, de manera que pueda iniciarse en la modelización matemática que tiene como insumo un problema de la vida real. De este modo se contribuye para el aprendizaje significativo de los estudiantes (Kwon, 2009; Niss y Blum, 2020; Juárez et al., 2020; Barquero y Jessen, 2020; Czocher, 2017; Greefrath y Vorhölter, 2016).

3. METODOLOGÍA

Acorde con el problema planteado y la pregunta de investigación el trabajo es de corte cualitativo, donde se busca explorar la implementación de una metodología didáctica y describir la comprensión matemática derivada de dicha implementación.

Los participantes en la investigación fueron los estudiantes que cursan la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). La asignatura pertenece al segundo nivel de la malla curricular de la carrera de Ingeniería Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE sede Latacunga - Ecuador. Por problemas de la pandemia de Covid-19, las clases se realizaron de forma virtual y sincrónica. La infraestructura tecnológica consistió en utilizar la plataforma Moodle, Google Classroom y/o el correo institucional; y, para las clases virtuales, la aplicación de Meet.

Los estudiantes tienen conocimiento de los contenidos teóricos de cálculo diferencial e integral y álgebra lineal. Al inicio del curso de EDO se procedió a solventar falencias encontradas en conceptos como continuidad, tasas de variaciones, la función derivada y su vínculo con la EDO

(Mkhatshwa, 2020). Además, los estudiantes conocen los métodos clásicos de solución de las EDO de primer orden.

Con estos antecedentes, se presenta la propuesta de investigación que está basada en los fundamentos teóricos de la EMR y que tiene como finalidad que el estudiante pueda analizar, reflexionar, generar ideas y métodos para encontrar la solución, explicación y argumentación del problema propuesto (Rasmussen y Ruan, 2008). El enfoque de enseñanza basado en la solución de un problema de contexto real pretende promover en los estudiantes la motivación para considerar a la matemática como una disciplina activa, así como establecer relaciones entre los elementos matemáticos. Esperamos que favorezca el desarrollo de habilidades como examinar, representar, transformar, resolver y aplicar sus conocimientos aprendidos (Groth, 2017).

La solución del sistema dinámico propuesto para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la EDO, constituye una tarea desafiante, que refleja una situación real y que sirve de punto de partida para que los estudiantes comiencen a investigar y explorar (Vajravelu, 2018). Por lo tanto, debe cumplir con los siguientes objetivos:

- Posibilitar la reinvención de ideas y métodos matemáticos para analizar la solución de la EDO.
- Evidenciar un balance entre los análisis, el proceso analítico, numérico y gráfico.

Se recurre a la utilización de sistemas informáticos, con el antecedente de que los estudiantes tienen conocimientos sobre la utilización de los softwarse Geogebra, Wxmaxima, Matlab, Simulink y Simscape (Braun et al., 2018). Esto implica que el foco de atención únicamente está centrado en la comprensión matemática de las EDO lineales de segundo orden.

La utilización de recursos tecnológicos es considerada como un recurso didáctico que permite a los estudiantes realizar diferentes exploraciones y puede facilitar estrategias de resolución, así como la verificación de sus conjeturas (Santos, 2016).

En la tabla 2, se presenta el instrumento para analizar la comprensión del estudiante en función del cumplimiento de los indicadores establecidos en función de los elementos de la comprensión matemática descritos por Perdomo (2011).

En el análisis de la información obtenida del estudiante se puede categorizar como SI cuando cumple la descripción del indicador, PARCIAL en el caso de tener una aproximación al indicador y finalmente como NO cuando no se identifica ningún rasgo de la descripción del indicador.

Tabla 2.

Indicadores para los elementos de la comprensión matemática

Elemento	Indicador	Descripción
Comprensión conceptual **(CC)**	CC1. Identifica las leyes empíricas y sus variables.	Conoce el contexto de aplicación de la EDO.
	CC2. Determina la EDO que constituye el modelo matemático	En base a las leyes empíricas determina la EDO que representa el problema planteado
Competencia Estratégica **(CE)**	CE1. Reconoce etapas de resolución de un problema de contexto real.	En base al problema propuesto, identifica el tipo de EDO, condiciones y sus posibles soluciones.
	CE2. Muestra habilidad para formular, representar y resolver problemas de aplicación de las EDO lineales.	Capaz de seleccionar entre distintos métodos, el más apropiado para la resolución del problema.
Fluidez en los procedimientos **(FP)**	FP1. Demuestra habilidad en la ejecución de los procedimientos para resolver el problema de forma flexible y correcta.	Dependiendo de la EDO que representa el modelo, aplica el método de solución.
	FP2. Argumenta sobre los tipos de solución de la EDO.	Distingue la solución general y particular de la EDO, y realiza un análisis sobre lo encontrado.
Razonamiento adaptativo **(RA)**	RA1. Da a conocer su capacidad para pensar de forma lógica. Analiza, reflexiona, explica y justifica.	Verifica la solución analítica realizada y la obtenida mediante el software, explica lo desarrollado e interpreta los resultados.
	RA2. Muestra capacidad para adaptar el modelo a la variación de condiciones del problema.	Realiza un análisis de las representaciones gráficas y numéricas obtenidas, genera simulaciones y establece relaciones con el contexto real.
Predisposición productiva **(PP)**	PP1. Contesta preguntas formuladas por sus compañeros.	Expone sus argumentos en base del fundamento conceptual teórico de las EDO.

	PP2. Demuestra interés por el aprendizaje de las EDO al vincularlas con problemas de su contexto o del perfil profesional de la carrera.	En función de su perfil profesional, formula un problema que pueda ser expresado mediante una EDO lineal de segundo orden, valora las restricciones que pueda realizar a las diferentes variables que intervienen en el problema.

Para la recogida de la información se empela la observación en las exposiciones de los trabajos grupales realizados por los estudiantes y la información es recogida mediante la tabla 2; utilizando la misma tabla se registran las producciones individuales de la solución de un problema planteado de contexto real, donde se diseñan actividades didácticas orientadas a identificar los indicadores de la comprensión matemática.

A continuación, se describen las actividades realizadas

- **Trabajo grupal**

  Plantear y realizar un problema de contexto real que se enmarque en un sistema dinámico masa-resorte-amortiguador, en el que se evidencie:

  a) La formulación del problema,
  b) El análisis de los elementos matemáticos que intervienen y sus condiciones iniciales del problema
  c) El desarrollo analítico ejecutado para resolver el problema justificando los procesos realizados
  d) La utilización de software matemático para verificar la solución encontrada y realizar variaciones a las condiciones iniciales para establecer parámetros reales de análisis.

- **Trabajo individual**

Planteamiento del problema a resolver por parte de los estudiantes

Analizar el sistema de amortiguamiento de una bicicleta donde el conductor tiene sobrepeso grado uno. Considerar que la persona pasa por un hueco y no pierde el equilibrio para continuar transitando. Relacionar los elementos matemáticos con el contexto del problema y ejecutar las siguientes actividades didácticas descritas en la tabla 3. Problema adaptado de Fauzan (2021).

Tabla 3.

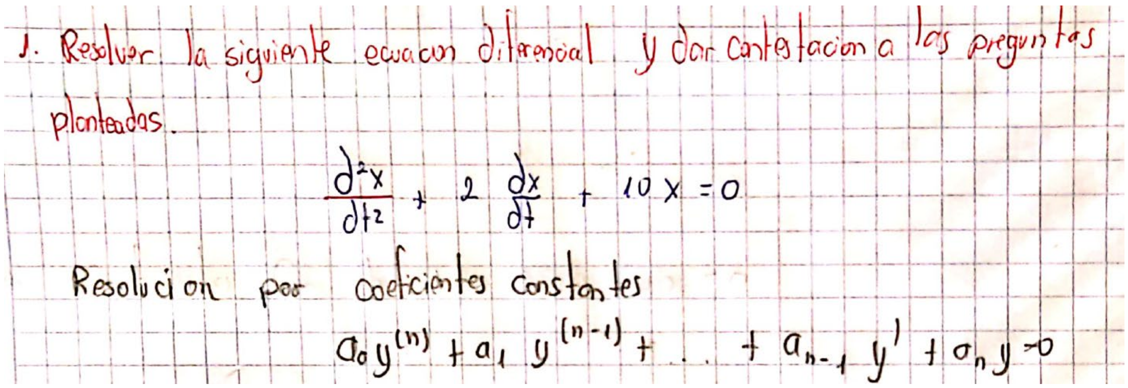
Diseño de actividades didácticas

Diseño de actividades didáctica	**Elementos de comprensión matemática que se desea activar**	**Se espera identificar en el estudiante la capacidad para**
Realizar una representación gráfica que relacione la masa de la persona, el amortiguador de la bicicleta y la constante de elasticidad del resorte.	▪ Comprensión conceptual (CC)	Establecer relaciones entre distintos tipos de representaciones y conectar diferentes conceptos matemáticos
Presentar el problema de contexto real mediante lenguaje formal de la matemática, considerando los elementos mecánicos y las condiciones que intervienen en el problema e inducir la representación gráfica de la posible solución del problema planteado.	▪ Competencia Estratégica (CE)	Representar y analizar los coeficientes del modelo matemático para una descripción cualitativa de la ecuación diferencial
Presentar el desarrollo analítico ejecutado y la verificación de la solución mediante la utilización de software matemático.	▪ Fluidez en los procedimientos (FP) ▪ Razonamiento adaptativo (RA)	Ejecutar procedimientos para resolver el problema de forma flexible y correcta
Proponer nuevos campos de aplicación de las EDO lineales de segundo orden en el campo de la ingeniería. Indicar qué se podría resolver aplicando EDO.	▪ Predisposición productiva (PP)	Capacidad para integrar los elementos que forman un concepto matemático y relacionarlo con otras ciencias y con la vida práctica.

Previo a la experiencia de investigación los estudiantes conocen y realizan ejercicios para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden las mismas no presentan ningún contexto de aplicación y sólo fortalecen el aspecto algorítmico de desarrollo, se adjunta un ejemplo.

Imagen 1.

Formulación de una EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes



1. Resolver la siguiente ecuacion diferencial y dar contestacion a las preguntas planteadas.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

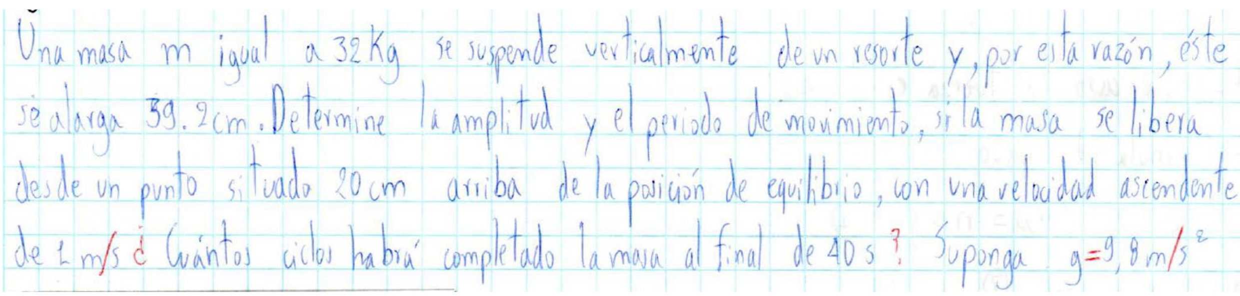
Resolucion por coeficientes constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

En la imagen 1 se tiene la propuesta de resolver un ejercicio que no representa ningún contexto de aplicación.

Imagen 2.

Propuesta de resolver un ejercicio de aplicación de una EDO lineal de segundo orden



Una masa m igual a 32 Kg se suspende verticalmente de un resorte y, por esta razón, éste se alarga 39.2cm. Determine la amplitud y el periodo de movimiento, si la masa se libera desde un punto situado 20 cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad ascendente de 1 m/s ¿Cuántos ciclos habrá completado la masa al final de 40 s? Suponga $g=9,8\ m/s^2$

En la imagen 2 se plantea la solución de un ejercicio de aplicación donde el enunciado define los datos en un contexto en particular, limitando la capacidad de análisis e integración de los fundamentos matemáticos con otras ciencias y con el contexto real del problema.

Transcripción de la imagen 2

Una masa m igual a 32 kg se suspende verticalmente de un resorte y, por esta razón, éste se alarga 39.2 cm. Determine la amplitud y el periodo de movimiento, si la masa se libera desde un punto situado 20 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 m/s. ¿Cuántos ciclos habrá completado la masa al final de 40 s? Suponga g = 9.8 m/s^2.

4. RESULTADOS

En primera instancia se procede a analizar la actividad ejecutada por tres estudiantes de acuerdo a las actividades solicitadas en la tabla 3 y posteriormente se identifican descriptores que orienten hacia los indicadores de la comprensión matemática descrita en la tabla 2.

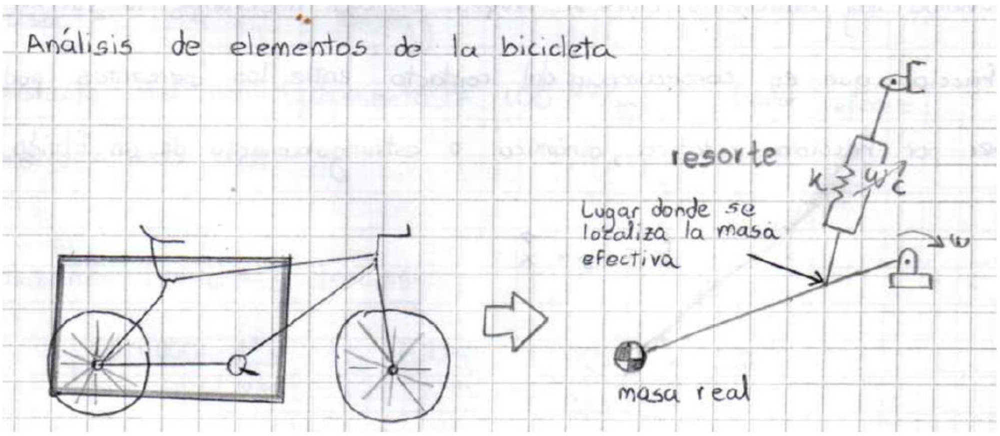
Actividad didáctica 1	**Principios de la educación matemática realista**

Realizar una representación gráfica que relacione la masa de la persona, el amortiguador de la bicicleta y la constante de elasticidad del resorte.	Emplea la intuición, el sentido común y la experiencia para contextualizar el problema, identificando elementos que podrían ser analizados en la solución del problema.

Actividad ejecutada por los estudiantes

Imagen 3.

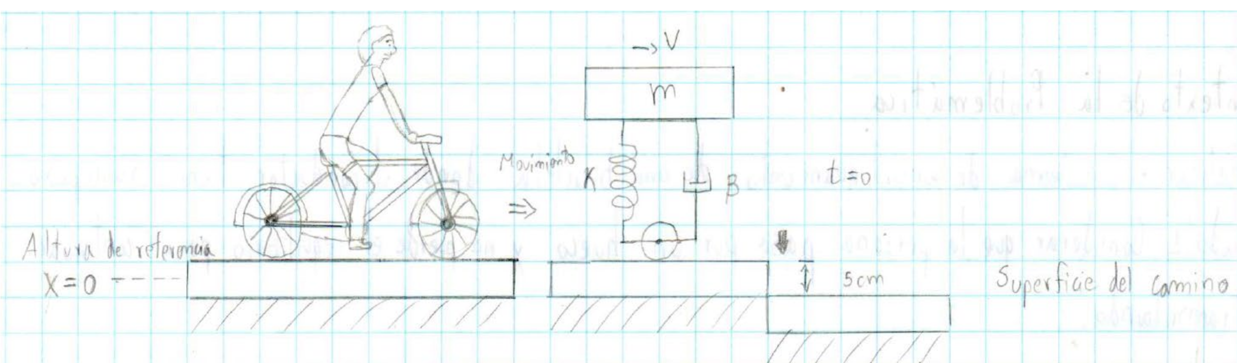
Actividad ejecutada por Solange



Identifica las variables masa, resorte y amortiguador (CC1), pero no determina la relación existente entre los elementos del sistema dinámico (CC2).

Imagen 4.

Actividad ejecutada por Jonathan



* La Segunda Ley de Newton:

$$\Sigma F = ma$$

que nos dice: la sumatoria de fuerzas es igual a masa por aceleración, lo mismo que:

$$\Sigma F = m \frac{d^2x}{dt}$$

ya que la segunda derivada de espacio sobre tiempo es igual a la aceleración

* Ley de Hooke

$$F = Kx$$

en vista de que ocupamos un resorte, interviene esta ley, con K como la constante y x el desplazamiento, pero en vista que el sistema ofrece un movimiento hacia abajo, decimos que:

$$F = -Kx$$

En la representación gráfica se observa que identifica las variables, establece un sistema de referencia, establece valores iniciales del problema (CC1). Además, establece relaciones entre los elementos mecánicos del sistema dinámico (CC2).

Imagen 5.

Actividad ejecutada por Yordan

En el ejemplo , el sistema masa, resorte, amortiguador . Esta representado por las siguientes partes : para la masa tenemos el peso de la persona y el de la bicicleta , el resorte formara parte del sistema mecánico de la bicicleta y este ayudara a reducir la fuerza de impacto en una caida en el caso que el nivel del suelo no sea regular , y el amortiguador presente en la bicicleta ayudara a disminuir las oscilaciones causadas por el resorte y así mantener estabilidad

La Segunda ley de Newton

la aceleración que un cuerpo experimenta es directamente proporcional a la suma de todas las fuerzas que actuan sobre él

$$\Sigma F = ma$$

Ley de Hooke

Establece que el alargamiento de un resorte es directamente proporcional a la fuerza que se le aplique

$$F_R = Kx$$

Homogeneidad o no homogeneidad:

Decimos que un sistema es homogéneo cuando no existen fuerzas externas perturbando el sistema, es decir, cuando la ecuación diferencial está igualada a cero caso contrario hablamos de un sistema no homogenéneo

Se concentra en la función que desempeñan los elementos mecánicos que intervienen en el sistema dinámico (CC1) y formula las leyes que le permiten determinar la EDO del sistema (CC2).

Actividad didáctica 2	Principios de la educación matemática realista
Presentar el problema de contexto real mediante lenguaje formal de la matemática, considerando los elementos mecánicos y las condiciones que intervienen en el problema e inducir la representación gráfica de la posible solución del problema planteado.	Matematización del problema a través de modelos matemáticos que permita formalizar, estructurar y resolver. Muestra su capacidad para pensar de forma lógica, analiza, reflexiona y justifica.

Actividad ejecutada por los estudiantes

Imagen 6.

Actividad ejecutada por Solange

Considerando los valores del problema podemos decir que:

- masa (de persona con sobrepeso grado 1) = 34 IMC

  Si consideramos una estatura de 1,60 metros, decimos:

  masa = 54 Kg = 54000 g

- constante del amortiguamiento = 100 Ns/m (valor supuesto)
- resorte = 1000 N/m

Reemplazando los datos tenemos:

$$54\,000 \frac{d^2x}{dt} + 100 \frac{dx}{dt} + 1000\, x = 0$$

Con valores iniciales:

$x(0) = 0$

$x'(3) = 1$

Asigna valores al problema y describe la EDO (CE1), pero no explica la formulación de la ecuación diferencial; es decir, no recurre a las leyes empíricas que se requieren para utilizar el modelo matemático. No relaciona los conceptos matemáticos que le permitirían visualizar un comportamiento de la solución (CE2).

Imagen 7.

Actividad ejecutada por Jonathan

De esta manera armamos la estructura de la EDO

$$m \frac{d^2x}{dt} = \Sigma F$$

$$m \frac{d^2x}{dt} = -\beta \frac{dx}{dt} - Kx$$

Reemplazando los valores del problema tenemos:

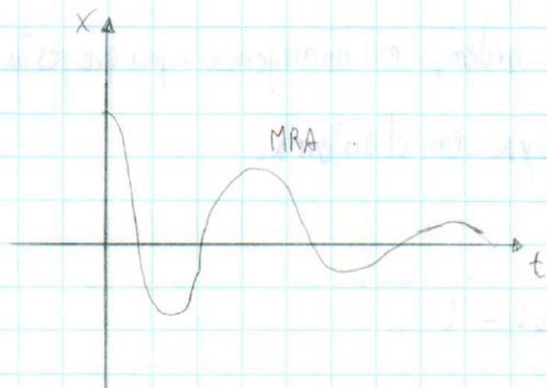
$$75 \frac{d^2x}{dt} = -5 \frac{dx}{dt} - 60x$$

Como condiciones iniciales tenemos:

$x(0) = 5\,cm \rightarrow \frac{1}{20}\,m$

$x'(0) = 0$

El comportamiento que posiblemente tendría la solución, sería la siguiente



Concluyendo que el sistema está subamortiguado.

Muestra conocimiento sobre las leyes empíricas que intervienen en el problema, relaciona los valores asignados con el modelo matemático (CE1). Se evidencia que no existe análisis entre los valores que representan los coeficientes de la masa, la constante de amortiguamiento y la constante de elasticidad del resorte para poder inducir el tipo de movimiento que se generaría en la solución del problema (CE2).

Imagen 8.

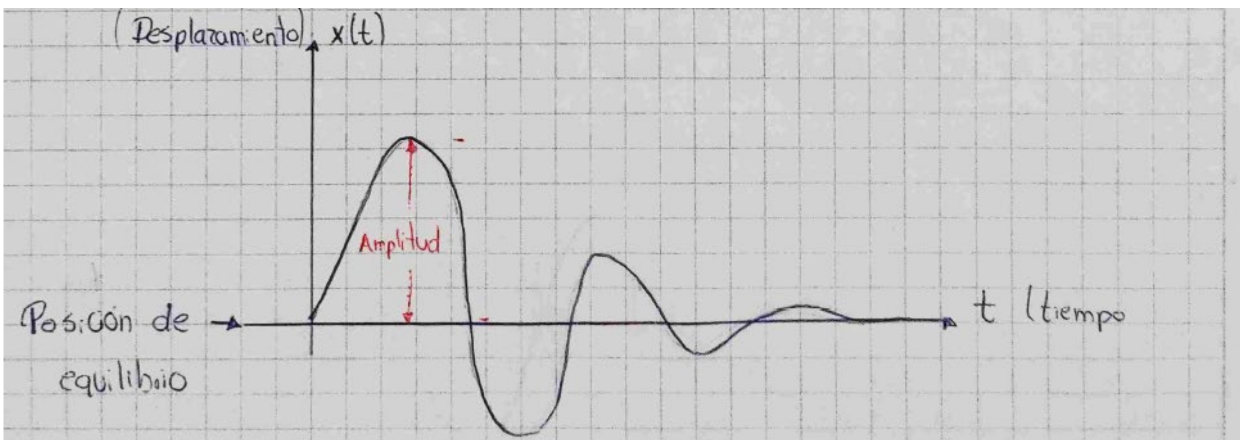
Actividad ejecutada por Yordan

Para hallar la ecuacion partimos de la segunda Ley de Newton

$$\Sigma F = ma$$

$$-F_R - F_A + W + f(t) = ma$$

$$-k(x_0 + x) - Cv + mg + f(t) = ma$$



Nuestra posible solución será una onda sinusoidal cuyo amplitud disminuye conforme pasa el tiempo hasta que la masa llegue a su posición de equilibrio. Buscamos que nuestra solución sea un sistema subamortiguado, en donde la constante del resorte sea mayor al amortiguador

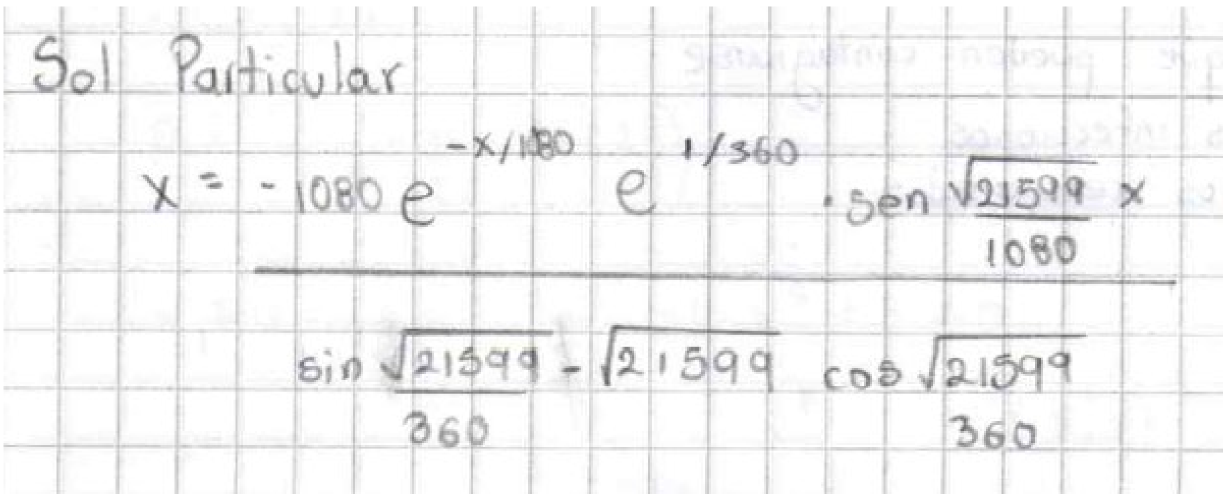
El estudiante asigna valores al problema, explica con claridad las leyes empíricas que intervienen en la formulación del modelo matemático, describe los elementos del modelo e induce la posible solución del problema en función de las condiciones asignadas (CE1); pero, el diseño de la representación gráfica no es sustentada en función de la ecuación diferencial formulada ni el método apropiado de solución (CE2).

Actividad didáctica 3	Principios de la educación matemática realista
Presentar el desarrollo analítico ejecutado y la verificación de la solución mediante la utilización de software matemático.	Los estudiantes analizan su propia actividad matemática a través del proceso de matematización que promueve la reflexión y comprensión.

Actividad ejecutada por los estudiantes

Imagen 9.

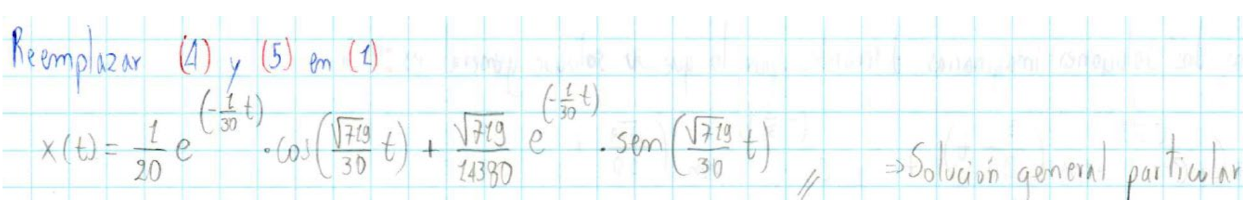
Actividad ejecutada por Solange

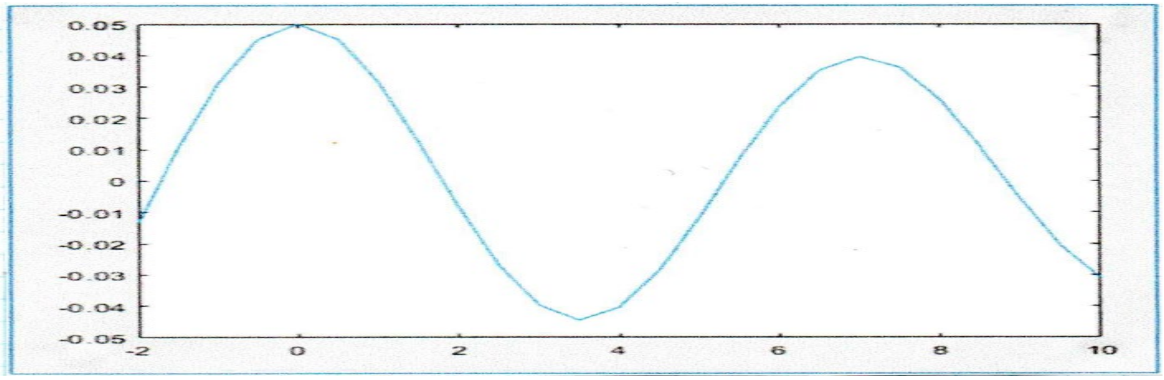


Presenta el desarrollo analítico del problema (FP1), no justifica los procesos ejecutados ni realiza el análisis de la solución encontrada, no establece representaciones gráficas que permitan analizar el problema en un contexto real.

Imagen 10.

Actividad ejecutada por Jonathan

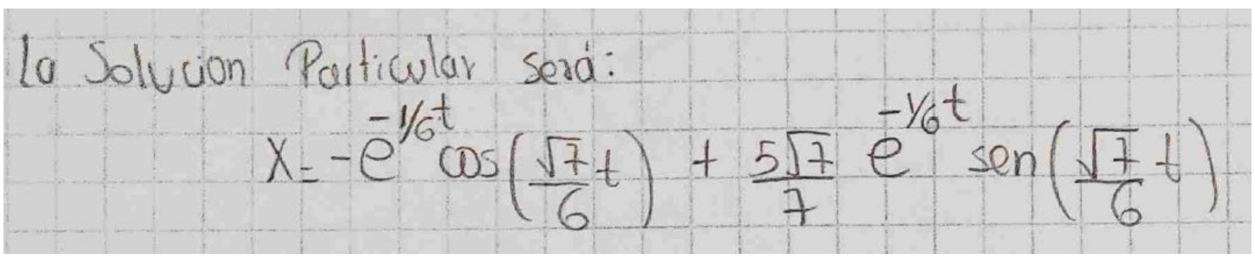




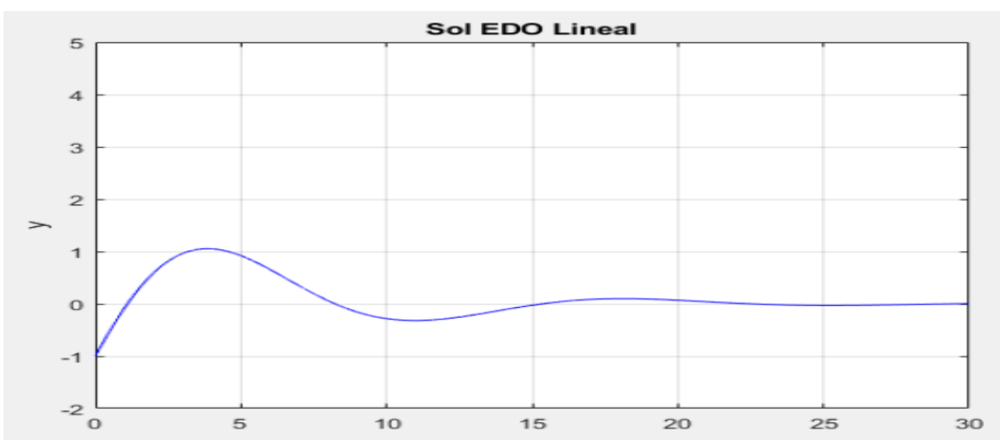
Se evidencia procesos correctos en la solución del modelo matemático (FP1) y verifica lo ejecutado analíticamente al comparar con resultados obtenidos mediante el software Matlab, el razonamiento adaptativo (RA) lo cumple parcialmente porque falta la capacidad de argumentación sobre el análisis e interpretación de los resultados en función del contexto real.

Imagen 11.

Actividad ejecutada por Yordan


la Solucion Particular será:

$$X = -e^{-1/6 t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{6}t\right) + \frac{5\sqrt{7}}{7}e^{-1/6 t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{6}t\right)$$



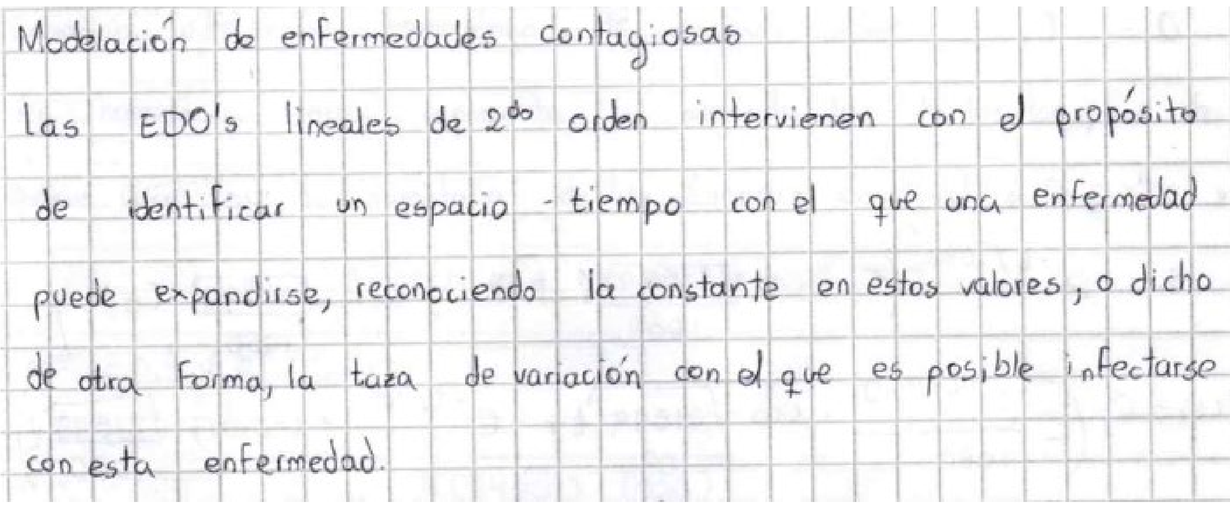
Ejecuta correctamente los procesos para resolver el problema (FP1), identifica la solución general y particular, pero no reflexiona sobre los procesos ejecutados (FP2). Además, no analiza ni interpreta los resultados encontrados (RA), utiliza el software matemático para resolver el problema planteado.

Actividad didáctica 4	Principios de la educación matemática realista
Proponer nuevos campos de aplicación de las EDO lineales de segundo orden en el campo de la ingeniería. Indicar qué se podría resolver aplicando modelos matemáticos.	La matemática educativa abre el espacio para la reinvención guiada, donde el estudiante propone modelos matemáticos para ser analizados en función de los fundamentos teóricos estudiados.

Actividad ejecutada por los estudiantes

Imagen 12.

Actividad ejecutada por Solange

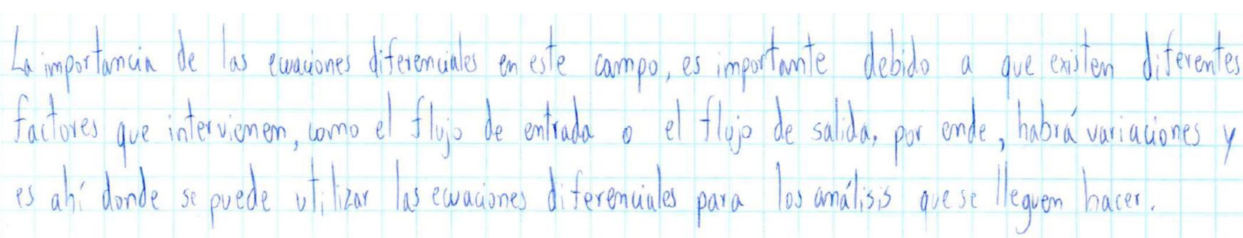


Modelación de enfermedades contagiosas
Las EDO's lineales de 2do orden intervienen con el propósito de identificar un espacio - tiempo con el que una enfermedad puede expandirse, reconociendo la constante en estos valores, o dicho de otra forma, la taza de variación con el que es posible infectarse con esta enfermedad.

Se relaciona el contagio de enfermadas como una tasa de variación, pero se necesita identificar las variables que podrían intervenir o cómo se podría provocar el contagio (PP2).

Imagen 13.

Actividad ejecutada por Jonathan



La importancia de las ecuaciones diferenciales en este campo, es importante debido a que existen diferentes factores que intervienem, como el flujo de entrada o el flujo de salida, por ende, habrá variaciones y es ahí donde se puede utilizar las ecuaciones diferenciales para los análisis que se lleguen hacer.

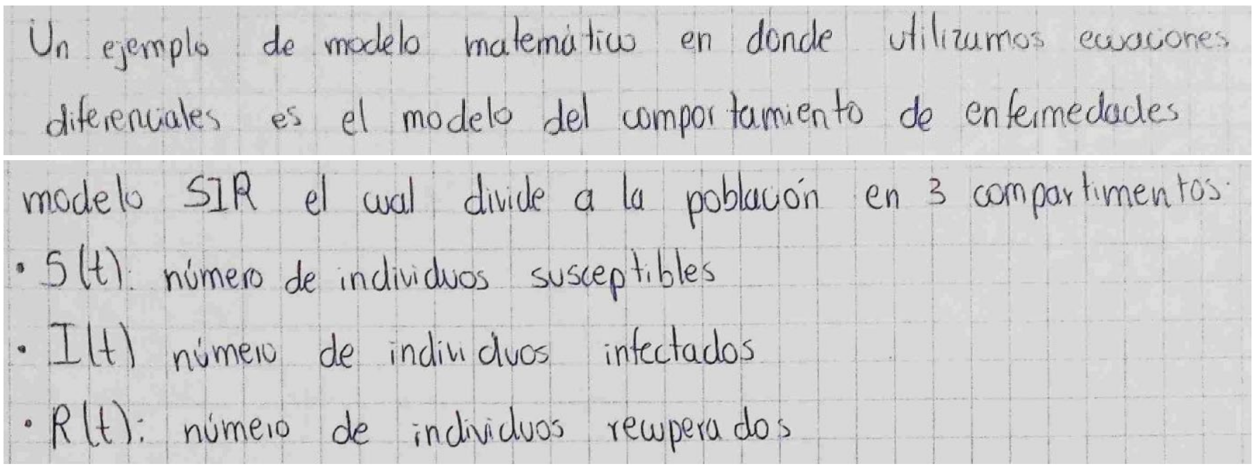
Transcripción de la imagen 13

La importancia de las ecuaciones diferenciales en este campo, es importante debido a que existen diferentes factores que intervienen, como el flujo de entrada o el flujo de salida por ende, habrá variaciones y es ahí donde se puede utilizar diferenciales para los análisis que se lleguen hacer.

Implícitamente se relaciona la estructura de una función y de su proceso de variación, pero no se puntualiza cuáles podrían ser sus variables para la formulación del modelo matemático (PP2).

Imagen 14.

Actividad ejecutada por Yordan



Un ejemplo de modelo matemático en donde utilizamos ecuaciones diferenciales es el modelo del comportamiento de enfermedades

modelo SIR el cual divide a la población en 3 compartimentos:

- S(t): número de individuos susceptibles
- I(t) número de individuos infectados
- R(t): número de individuos recuperados

Se puntualiza los elementos que intervienen en el modelo matemático, conceptualizando que una ecuación diferencial tiene variables en su formulación matemática, no identifica restricciones al problema planteado (PP2).

Por lo tanto, mediante la implementación de la actividad propuesta se enfatiza la secuencia de instrucciones que ayude a los estudiantes para alcanzar el objetivo de aprendizaje permitiendo una adecuada presentación del trabajo y la búsqueda de futuras aplicaciones en el campo de la vida real (Habre, 2020; Lozada y Fuentes, 2018). En este sentido, el estudiante que resuelve un problema de contexto real, diseñado bajo las características y principios de la EMR, es capaz de construir y reconstruir el conocimiento matemático formal de las EDO.

En la tabla 4 se presenta el resumen de los resultados identificados acerca de la comprensión matemática descrita en la tabla 2 que guardan relación con el diseño de las actividades didácticas descritas en la tabla 3.

Tabla 4.

Resultados de los indicadores para los elementos de la comprensión matemática

Comprensión	Descripción	Solange	Jonathan	Yordan
Comprensión conceptual **(CC)**	CC1	SI	SI	SI
	CC2	NO	SI	SI
Competencia Estratégica **(CE)**	CE1	SI	SI	SI
	CE2	NO	NO	NO
Fluidez en los procedimientos **(FP)**	FP1	SI	SI	SI
	FP2	NO	SI	SI
Razonamiento adaptativo **(RA)**	RA1	NO	PARCIAL	PARCIAL
	RA2	NO	PARCIAL	PARCIAL
Predisposición productiva **(PP)**	PP1	SI	SI	SI
	PP2	NO	NO	NO

Mediante la tabla 4 se puede evidenciar como la solución de un problema de contexto real orientado al aprendizaje de las EDO realizado bajo los principios de la EMR permite conseguir logros en la comprensión conceptual, la fluidez en los procedimientos, pero es necesario diseñar estrategias didácticas que se oriente a fortalecer la predisposición productiva y la competencia estratégica enmarcada en formular un problema que pueda ser expresado mediante una EDO lineal de segundo orden, valorando las restricciones a las diferentes variables que intervienen en el problema y su correspondiente modelo matemático.

5. CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación cualitativa descrita en la tabla 4 muestran los elementos de la comprensión matemática que se han propiciado con un diseño de enseñanza basado en situaciones reales para el estudio de las EDO lineales de segundo orden. Mediante la tabla 2 se determinaron los indicadores que permiten valorar la actividad ejecutada por el estudiante en función del cumplimiento de las actividades didácticas diseñadas bajo las nociones de la EMR y descritas en la tabla 3 orientadas en la solución de un problema de contexto real.

En términos generales se concluye que la comprensión conceptual (CC) ha sido lograda por los estudiantes, y se necesita rediseñar las actividades para lograr la competencia estratégica, la fluidez en los procedimientos (FP), el razonamiento adaptativo (RA) y la predisposición productiva (PP) las mismas que han sido logradas de una forma parcial positiva.

Como consecuencia de los resultados de la investigación y considerando las actividades académicas que se ejecutaban antes de la misma, se resalta la iniciativa de los estudiantes por mejorar su capacidad de análisis, reflexión y creatividad al activar el conocimiento de conceptos matemáticos y su relación con los elementos mecánicos y eléctricos que se utilizaron para el planteamiento de problemas de contexto real. Además, se evidencio buen desempeño en los procedimientos de cálculo y la utilización de software matemático.

REFERENCIAS

Arslan, S. (2010a). Do students really understand what an ordinary differential equation is? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(7), 873-888. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486448

Arslan, S. (2010b). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. Teaching mathematics and its applications: An International Journal of the IMA, 29(2), 94-107. https://doi.org/10.1093/teamat/hrq001

Artigue, M. (2021). Mathematics education research at university level: Achievements and challenges. In Research and development in University Mathematics Education, 2-21. https://doi.org/10.4324/9780429346859

Barquero, F., y Jessen, B. (2020). Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling task. Avances de investigación en educación matemática. https://hdl.handle.net/11162/198309

Bergsteiner, H., Avery, G., y Neumann, R. (2010). Kolb's experiential learning model: critique from a modelling perspective. Studies in Continuing Education, 32(1), 29-46. https://doi.org/10.1080/01580370903534355

Braun, B., Bremser, P., Duval, A., Lockwood, E., y White, D. (2018). What does active learning mean for mathematicians? The Best Writing on Mathematics 2018, edited by Mircea Pitici, Princeton: Princeton University Press, 2018, 169-178. https://doi.org/10.1515/9780691188720-015

Camacho, M., y Guerrero, O. (2015). Identifying and exploring relationships between contextual situations and ordinary differential equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(8), 1077-1095. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1025877

Czocher, J. (2016). Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. Mathematical Thinking and Learning, 18(2), 77-106. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148530

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In International handbook of mathematics education, Springer, Dordrecht, 49-97. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_3

Dullius, M. (2011). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. Universidad de Burgos. https://core.ac.uk/download/pdf/61545447.pdf

Farrás, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29(3), 339-352.

Fauzan, A. (2021). The Development of Student Worksheet Based on Realistic Mathematics Education in Ordinary Differential Equations of Order-1. In Journal of Physics: Conference Series. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1742/1/012018

Freudenthal, H. (2006). Revisiting mathematics education: China lectures (Vol. 9). Springer Science y Business Media.

Freudenthal, H. (2012). Mathematics as an educational task. Springer Science y Business Media.

Gravemeijer, K., y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. Journal of curriculum studies, 32(6), 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Greefrath, G., y Vorhölter, K. (2016). Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries. Springer Nature. https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27708/1002298.pdf?sequence=1

Groth, R. (2017). Classroom data analysis with the five strands of mathematical proficiency. The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 90(3), 103-109. https://doi.org/10.1080/00098655.2017.1301155

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. The Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 455-472. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00024-9

Hernández, R., Mariño, L., y Penagos, M. (2017). Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como modelos matemáticos. Eco Matemático, 54-60. https://doi.org/10.22463/17948231.1383

Hernández, S., Jaimes, C., y Chaves, E. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. Mundo FESC, 6(11), 7-15. Recuperado a partir de https://www.fesc.edu.co/Revistas/OJS/index.php/mundofesc/article/view/77

Juárez, R., Chamoso, S., y González, A. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 38(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Khotimah, R., y Masduki, M. (2016). Improving teaching quality and problem solving ability through contextual teaching and learning in differential equations: A lesson study approach. JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education), 1(1), 1-13.

Kwon, O. (2009). Conceptualizing the realistic mathematics education aproach in the teaching and learning of ordinary differential equations. Colección Digital Eudoxus, (11).

Lozada, J., y Fuentes, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32, 57-74. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a03

Mkhatshwa, T. (2020). Calculus students' quantitative reasoning in the context of solving related rates of change problems. Mathematical Thinking and Learning, 22(2), 139-161. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1658055

Niss, M. y Blum, W. (2020). The learning and teaching of mathematical modelling. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Perdomo, D. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78, 113-134.

Rasmussen, C., y King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(2), 161-172. https://doi.org/10.1080/002073900287219

Rasmussen, C., y Keene, K. (2019). Knowing solutions to differential equations with rate of change as a function: Waypoints in the journey. The Journal of Mathematical Behavior, 56, 100695. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.03.002

Rasmussen, C., y Ruan, W. (2008). Teaching for understanding: A case students learning to use the uniqueness theorem as a tool in differential equations. Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics: MAA notes, (73), 153-164.

Rodríguez, L., Ponce, Y., y Pérez, A. (2016). La comprensión matemática de las funciones en interdisciplinariedad con la Física a través de problemas de la vida práctica. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 47, 176-191.

Ross, S. L. (2021). Ecuaciones diferenciales. Reverté.

Santos, L. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2016, 333-346.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). Journal of Education, 196(2), 1-38.

Schukajlow, S., Kaiser, G., y Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. ZDM: The International Journal on Mathematics Education. 50(43132), 5-18. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0933-5

Shahbari, J., y Daher, W. (2016). Pre-service teachers' mathematical models' features. European Journal of Science and Mathematics Education, 4(4), 523-533. https://doi.org/10.30935/scimath/9491

Vajravelu, K. (2018). Innovative Strategies for Learning and Teaching of Large Differential Equations Classes. International Electronic Journal of Mathematics Education, 13(2), 91-95. https://doi.org/10.12973/iejme/2699

Zeynivandnezhad, F., y Bates, R. (2018). Explicating mathematical thinking in differential equations using a computer algebra system. International Journal of mathematical education in science and technology, 49(5), 680-704. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1409368

Zeynivannezhad, F. (2014). Mathematical thinking in Differential Equations through a computer algebra system (Doctoral dissertation, Universiti Teknologi Malaysia). https://core.ac.uk/download/pdf/199241733.pdf

Zill, D. G., y Cullen, M. R. (2013). Ecuaciones diferenciales. McGraw-Hill Interamericana.